# Correction du DS 2 Algèbre (décembre 2019)

## Ex 1

1/ $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ $g$ est injective. (Faux

$f : x \longmapsto \sqrt{x}$

$g : x \longmapsto x^2$

2/ $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ $g$ est surjective (Vraie).

soit $z \in G$, $\exists ?\ y \in F$ tq $z = g(y)$

on a : $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow \exists\ x \in E$ tq $z = g(f(x))$

soit $y = f(x) \in F$ et on a : $z = g(y)$.

3/ $B = f(f^{-1}(B))$ (Faux)

$F = \{2, 0, 1\}$ $\qquad E = \{0, 1, 3\}$

$B = \{0, 2\}$

$f : 0 \longmapsto 0$

$\quad 1 \longmapsto 0$

$\quad 3 \longmapsto 1$

$f^{-1}(B) = f^{-1}(\{0\})$

$= \{0, 1\}$

$f(\{0, 1\}) = \{0\} \neq B$

## Ex 2

$E(x) \leq x < E(x) + 1$

$\forall z \in \mathbb{Z}$, $E(z) = z$

$E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$

$E(\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}$

$E^{-1}([-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) = [-1, 2[$

$$E^{-1}(\{x\}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ [x, x+1[ & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ex 3

(a) $z = a + ib$ avec $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$
$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

on a : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = \pm \sqrt{3} \\ b = \pm 1 \\ \text{a et b de m̂ signe.} \end{cases}$

$S_{\mathbb{C}} = \{ \sqrt{3} + i , -\sqrt{3} - i \}$.

(b) $z^4 = 2 + 2i\sqrt{3} = (\sqrt{3} + i)^2$

$\left(z^2 - (\sqrt{3} + i)\right)\left(z^2 + (\sqrt{3} + i)\right) = 0$

$z^2 = \sqrt{3} + i$ ou $z^2 = -\sqrt{3} - i$

soit $z = x + iy$ $x, y \in \mathbb{R}$.

on a : $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x, y \text{ de m̂ signe} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 2 \\ x, y \text{ de signe opposé} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \mp \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}} \\ y = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}} \\ x, y \text{ de m̂ signe} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}} \\ y = \pm \sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}} \\ x, y \text{ de signe opposé} \end{cases}$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{ \pm\left(\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}\right) , \pm\left(\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}\right) \right\}$

2/ soit $z = r e^{i\theta}$ , $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}^*$

$z^4 = 2 + 2i\sqrt{3}$ déterminons l'écriture exponentielle de $g = 2+2i\sqrt{3}$

$|g| = 4$ $g = 4 e^{i\alpha}$ , $\alpha \in \mathbb{R}^*$

avec $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \pi/3$.

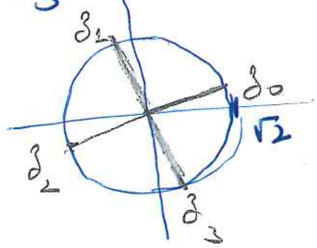
on a $r^4 e^{i4\theta} = 4 e^{i\pi/3} \Rightarrow \begin{cases} r = (4)^{1/4} \\ \theta = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$

avec $k = 0, 1, 2, 3$.

$S_{\mathbb{C}} = \{ \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k = 0, 1, 2, 3 \}$.

$= \{ z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/12}, z_1 = \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$z_2 = \sqrt{2} e^{i13\pi/12}, z_3 = \sqrt{2} e^{i\frac{19\pi}{12}} \}$




$z_0 = \sqrt{2}(\cos \pi/12 + i \sin \pi/12)$

$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$

$z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12})$

$z_3 = \sqrt{2}(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12})$

3) les solutions de la Q 2 et la Q 1.b sont les m̂, par identification: $z_1 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$

donc $\cos \pi/12 + i \sin \pi/12 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Ex4 $z_0 = e^{i\theta_0}$ $\theta_0 \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$.

1) $$z_{n+1} = \frac{|z_n| + z_n}{2}$$

$$z_{n+1} = \frac{r_n + r_n e^{i\theta_n}}{2}$$

$$= \frac{r_n}{2} \cdot \left(1 + e^{i\theta_n}\right) = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \left(\frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2}\right)$$

$$= r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \; e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$ ; $\forall \theta_n \in ]-\pi, \pi[, \cos\frac{\theta_n}{2} > 0$

2) $$r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2} \; e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$

par identification : $r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta_n}{2}$

$$\begin{cases} \theta_{n+1} \equiv \frac{\theta_n}{2} \; [2\pi]. \text{ or} \\ \theta_n \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \text{ et } \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$$

$(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. de raison $\frac{1}{2}$

donc $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$

3/ Montrons par récurrence que : pour tout $n \geq 1$

$$r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

$r_1 = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \cos\frac{\theta_0}{2}$ vrai

car $r_1 = r_0 \cos\frac{\theta_0}{2}$ avec $r_0 = 1$

soit $n \geq 1$,
supposons que $r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$

$$r_{n+1} = r_n \cdot \cos\frac{\theta_n}{2}.$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta_0}{2^{n+1}}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

<u>Conclusion</u> pour tout $n \geq 1$, $r_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$

/ $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$

$$z_n = r_n e^{i\theta_n} = \prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) e^{i\frac{\theta_0}{2^k}}$$

$$z_{n+1} = r_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}$$

$$y_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) = r_n \frac{\sin\theta_n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} y_n$$

5/ $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$

$= \mathrm{Im}(r_n \, e^{i\theta_n})$

$= r_n \cdot \sin\theta_n$.

$= \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$.

or $(y_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

donc $y_n = \frac{y_0}{2^n} = \frac{\sin\theta_0}{2^n}$.

donc $\frac{\sin\theta_0}{2^n} = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)$

donc $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right) = \frac{\sin\theta_0}{2^n \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}$

**Ex 5**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x^3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2/ • soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, tq: $f(x_1) = f(x_2)$, Mq $x_1 = x_2$.

si $f(x_1) = f(x_2) > 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ car $x_1, x_2 > 0$

si $f(x_1) = f(x_2) \leq 1 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$
$\Rightarrow x_1 = x_2$ car $x \mapsto x^3$ est injective.

donc $f$ est injective

• soit $z \in \mathbb{R}$, Mq $\exists\, x \in \mathbb{R}$ tq: $z = f(x)$

si $z > 1$, $z = (\sqrt{z})^2 = f(\sqrt{z})$

si $z \leq 1$, $z = (\sqrt[3]{z})^3 = f(\sqrt[3]{z}) = z$.

d'ou $f$ est surjective.

conclusion: $f$ est bijective.

3/ a) $f \circ g(x) = \begin{cases} f(\sqrt[3]{x}) & \text{si } x \leq 1 \\ f(\sqrt{x}) & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} (\sqrt[3]{x})^3 & \text{si } x \leq 1 \\ (\sqrt{x})^2 & x \geq 1 \end{cases}$

donc $f \circ g(x) = x$. $\Rightarrow f \circ g = id_{\mathbb{R}}$.

$g \circ f(x) = \begin{cases} g(x^2) & \text{si } x > 1 \\ g(x^3) & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

$f^{-1} = g$.

$= \begin{cases} \sqrt{x^2} & \text{si } x > 1 \\ \sqrt[3]{x^3} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow g \circ f \overset{= x}{=} id_{\mathbb{R}}$. (b) $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$ et $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$
donc $f$ est bijective et