



# Classe préparatoire 1<sup>ère</sup> année

## Devoir surveillé n°1

Matière : <b>Algèbre semestre 1</b>	Date : 27/09/2013
Calculatrice autorisée : <b>NON</b>	Durée de l'épreuve : <b>2 heures</b>
<b>Téléphone portable et documents interdits</b>	Nombre de pages du sujet : <b>2</b>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

### EXERCICE 1 (3 points)

1) Soit l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$ . Peut-on écrire (répondre par VRAI ou FAUX) ?

- |                       |  |
|-----------------------|--|
| (a) $a \in E$         | (d) $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$ |
| (b) $\emptyset \in E$ | (e) $a \in \mathcal{P}(E)$             |
| (c) $a \subset E$     | (f) $\{a, b\} \subset E$               |

2) L'ensemble  $\mathcal{P}(\emptyset)$  est-il vide ? Justifier votre réponse.

3) Soient les ensembles  $E = \{\heartsuit, \clubsuit\}$  et  $F = \{a, b\}$ . Déterminer les ensembles suivants :

- (a)  $\mathcal{P}(E)$
- (b)  $E \times F$
- (c)  $\mathcal{P}(E \times F)$

### EXERCICE 2 (2 points)

Notons  $E$  l'ensemble des étudiants de l'EISTI,  $S$  l'ensemble des jours de la semaine et pour un étudiant  $x$ ,  $h_j(x)$  son heure de réveil le jour  $j$ .

- 1) Ecrire avec de quantificateurs et de symboles mathématiques la proposition :  
«Tout étudiant de l'EISTI se réveille au moins un jour de la semaine avant 8h»
- 2) Ecrire la négation de cette proposition avec des symboles mathématiques puis l'énoncer en français.
- 3) Commenter la véracité de ces propositions.

### EXERCICE 3 (6 points)

1) Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois sous-ensembles de  $E$ . Montrer que

- (a)  $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$
- (b)  $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \Leftrightarrow B = C$

2) Soient A et B deux sous-ensembles de E tels que :

$$A \not\subset B, B \not\subset A, A \cup B \neq E, A \cap B \neq \emptyset.$$

On note

$$E_1 = A \setminus B, E_2 = B \setminus A, E_3 = A \cap B, E_4 = \overline{A \cup B}$$

(a) Montrer que  $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$

(b) Que faudrait-il montrer en plus pour que  $(E_i)_{i \in \{1, \dots, 4\}}$  forment une partition de E (il n'est pas demandé de le montrer) ?

#### EXERCICE 4 (5 points)

1) (a) Enoncer la formule du binôme de Newton

(b) Développer :  $(x-2y)^5$

2) (a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(b) En déduire la somme suivante en fonction de n

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2$$

#### EXERCICE 5 (4 points)

On définit la relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

- 1) Le réel 2 est-il en relation avec le réel 1 ?
- 2) La relation est-elle réflexive ?
- 3) La relation est-elle symétrique ?
- 4) La relation est-elle transitive ?

## CORRECTION

### DS1 Algèbre

#### EXERCICE 1

1)

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| (a) $a \in E$ VRAI         | (d) $\emptyset \subset \mathcal{P}(E)$ FAUX |
| (b) $\emptyset \in E$ FAUX | (e) $a \in \mathcal{P}(E)$ FAUX             |
| (c) $a \subset E$ FAUX     | (f) $\{a,b\} \subset E$ VRAI                |

2)  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$  donc il n'est pas vide.

3) a)  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{\clubsuit\}, \{\heartsuit\}, E\}$

b)  $E \times F = \{(\heartsuit, a), (\heartsuit, b), (\clubsuit, a), (\clubsuit, b)\}$

c)  $\mathcal{P}(E \times F) = \{ \emptyset, \{(\heartsuit, a)\}, \{(\heartsuit, b)\}, \{(\clubsuit, a)\}, \{(\clubsuit, b)\}, \{(\heartsuit, a), (\heartsuit, b)\},$

$\{(\heartsuit, a), (\clubsuit, a)\}, \{(\heartsuit, a), (\clubsuit, b)\}, \{(\heartsuit, b), (\clubsuit, a)\}, \{(\heartsuit, b), (\clubsuit, b)\}, \{(\clubsuit, a), (\clubsuit, b)\},$

$\{(\heartsuit, a), (\heartsuit, b), (\clubsuit, a)\}, \{(\heartsuit, a), (\heartsuit, b), (\clubsuit, b)\}, \{(\heartsuit, a), (\clubsuit, a), (\clubsuit, b)\},$

$\{(\heartsuit, b), (\clubsuit, a), (\clubsuit, b)\}, E \}$

#### EXERCICE 2

1)  $P : \forall x \in E, \exists j \in S, h_j(x) < 8$

2)  $\bar{P} : \exists x \in E, \forall j \in S, h_j(x) \geq 8 \Leftrightarrow$  « il existe un étudiant à l'EISTI qui se lève après 8h tous les jours de la semaine »

3) J'espère que  $\bar{P}$  est fausse !

#### EXERCICE 3

1) (a) Supposons que  $A \subset B$  et montrons que  $A \cup C \subset B \cup C$ .

Soit  $x \in A \cup C$  donc  $x \in A$  ou  $x \in C$ .

- Si  $x \in C$  alors  $x \in B \cup C$
- Si  $x \in A$  alors  $x \in B$  car  $A \subset B$ , d'où  $x \in B \cup C$

Donc  $A \cup C \subset B \cup C$ .

(b)

- Supposons que  $A \cup B = A \cup C$  et  $A \cap B = A \cap C$  et montrons que  $B = C$ .

Montrons tout d'abord que  $B \subset C$ . Soit  $x \in B$  alors  $x \in A \cup B$ , d'où  $x \in A \cup C$  car  $A \cup B = A \cup C$ . Donc  $x \in A$  ou  $x \in C$ . Si  $x \in A$ , alors étant donné que  $x \in B$ , on a  $x \in A \cap B$ . Donc  $x \in A \cap C$  car  $A \cap B = A \cap C$ . D'où  $x \in C$ .  
Donc dans tous les cas,  $x \in C$ , c'est-à-dire  $B \subset C$ . De la même façon on montre que  $C \subset B$  donc que  $B = C$ .

• Supposons que  $B = C$  alors automatiquement on a  $A \cup B = A \cup C$  et  $A \cap B = A \cap C$ .  
Finalement,

$$A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow B = C.$$

$$2) (a) E_1 \cap E_2 = (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A}) = (A \cap \bar{A}) \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset$$

$$E_1 \cap E_3 = (A \setminus B) \cap (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap A) = A \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset$$

$$E_1 \cap E_4 = (A \setminus B) \cap (\overline{A \cup B}) = (A \cap \bar{B}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cap \bar{B} = \emptyset$$

$$E_2 \cap E_3 = (B \setminus A) \cap (A \cap B) = (B \cap \bar{A}) \cap (B \cap A) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \emptyset$$

$$E_2 \cap E_4 = (B \setminus A) \cap (\overline{A \cup B}) = (B \cap \bar{A}) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A} \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset$$

$$E_3 \cap E_4 = (A \cap B) \cap (\overline{A \cup B}) = (A \cap B) \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = (A \cap \bar{A}) \cap (B \cap \bar{B}) = \emptyset$$

(b) Il faut montrer que

- $E_i \neq \emptyset$ ,  $i=1,2,3,4$
- $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 = E$

#### EXERCICE 4

1) Cf cours

$$2) (x-2y)^5 = x^5 + 5x^4(-2y) + 10x^3(-2y)^2 + 10x^2(-2y)^3 + 5x(-2y)^4 + (-2y)^5 \\ = x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

3) Initialisation : Pour  $n=1$ , on a

$$\sum_{k=0}^1 k^2 = 0^2 + 1^2 = 1 \text{ et } \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = 1$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang  $n$  et montrons qu'elle est vraie au rang  $n+1$ , c-a-d que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Donc la propriété est vraie au rang  $n+1$

Conclusion : La propriété est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

$$4) S_n = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^n 4k^2 - 4k + 1 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ = 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

## EXERCICE 5

- 1) Si on pose  $x=2$  et  $y=1$  alors  $xe^y=2e^1=2e$  et  $ye^x=1e^2=e^2$  donc  $xe^y \neq ye^x$  donc 2 n'est pas en relation avec 1.
- 2) Soit  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $xe^x = xe^x$  donc  $x \mathcal{R} x$ . La relation est donc réflexive.
- 3) Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que  
 $x \mathcal{R} y \Rightarrow xe^y = ye^x \Rightarrow ye^x = xe^y \Rightarrow y \mathcal{R} x$   
Donc la relation est symétrique
- 4) Soient  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  et  $z \in \mathbb{R}$  tels que

$$x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow \begin{cases} xe^y = ye^x \\ ye^z = ze^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{e^x} = \frac{y}{e^y} \\ \frac{y}{e^y} = \frac{z}{e^z} \end{cases} \text{ car exponentielle non nulle}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{z}{e^z} \Rightarrow xe^z = ze^x \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

Donc la relation est transitive.