

Corrigé DS2 Algèbre (16/11/2018)

Exercice 1 .

On a $100 = 17 \times 5 + 15$, ainsi $100 \equiv 15 \equiv -2[17]$ puis $100^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv -1[17]$.

Ainsi $100^{2018} = 100^{4 \times 504 + 2} = (100^4)^{504} \times 100^2 \equiv (-1)^{504} \times 100^2 \equiv 100^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4[17]$.

Le reste de la division euclidienne de 100^{2018} par 17 est donc 4.

Exercice 2 .

1. Le seul moyen de le faire est de construire une application injective qui va d'un ensemble de cardinal 2 dans un ensemble de cardinal 3.

Par exemple, $f : E_1 \rightarrow E_3$ donnée par $f(\text{garçon}) = \text{chaise}$ et $f(\text{fille}) = \text{table}$.

Cette application est injective car "garçon" et "fille" ont des images distinctes ; elle n'est pas surjective car "armoire" n'a pas d'antécédent.

2. Le seul moyen de le faire est de construire une application surjective qui va d'un ensemble de cardinal 3 dans un ensemble de cardinal 2.

Par exemple, $f : E_3 \rightarrow E_1$ donnée par $f(\text{chaise}) = \text{garçon}$ et $f(\text{table}) = f(\text{armoire}) = \text{fille}$.

Cette application est surjective car "garçon" et "fille" ont chacun au moins un antécédent ; elle n'est pas injective car "table" et "armoire" ont la même image.

3. $f : E_2 \rightarrow E_1$ donnée par $f(\text{lune}) = f(\text{soleil}) = \text{fille}$.

Cette application n'est pas injective car "lune" et "soleil" ont la même image ; elle n'est pas surjective car "garçon" n'a pas d'antécédent.

4. Le seul moyen de le faire est de construire une application bijective qui va d'un ensemble de cardinal 2 dans un ensemble de cardinal 2.

Par exemple, $f : E_1 \rightarrow E_2$ donnée par $f(\text{garçon}) = \text{lune}$ et $f(\text{fille}) = \text{soleil}$.

Cette application est bijective car "lune" et "soleil" ont chacun exactement un antécédent par f .

Exercice 3 .

1. L'application f n'est pas injective. Par exemple, on a $f(1, 2) = f(2, 4)$.

2. L'application f n'est pas surjective. Par exemple, le réel $\sqrt{2}$ n'a pas d'antécédent par f , car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3. $f(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) = \mathbb{Q}$. En effet :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, f(m, n) = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement, tout nombre rationnel s'écrit sous la forme $\frac{m}{n}$ avec $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. (On peut toujours s'arranger pour que le dénominateur soit positif, quitte à multiplier numérateur et dénominateur par -1).

4. (a) Soit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a : $(m, n) \in f^{-1}(\{1\}) \Leftrightarrow f(m, n) = 1 \Leftrightarrow m = n$. Ainsi,

$$f^{-1}(\{1\}) = \{(n, n), n \in \mathbb{N}^*\}.$$

- (b) Soit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a : $(m, n) \in f^{-1}(\{q\}) \Leftrightarrow f(m, n) = q \Leftrightarrow m = nq$. Ainsi,

$$f^{-1}(\{q\}) = \{(nq, n), n \in \mathbb{N}^*\}.$$

- (c) Soit $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, on a : $(m, n) \in f^{-1}(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow f(m, n) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \frac{m}{n} = k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, m = nk$.

Ainsi,

$$f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{(nk, n), n \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}.$$

De façon équivalente,

$$f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, n \text{ divise } m\}.$$

Exercice 4 .

1. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. On a $f(x_1) = f_1(x_1) \in F_1$ et $f(x_2) = f_2(x_2) \in F_2$. Comme $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, on a nécessairement $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. \Rightarrow) Supposons que f est injective, et montrons que f_1 et f_2 le sont.
 f_1 injective? Soit $(a, b) \in E_1^2$ tel que $f_1(a) = f_1(b)$, on a alors $f(a) = f(b)$ et comme f est injective, on déduit que $a = b$.
 Idem pour f_2 injective.

\Leftarrow) Supposons que f_1 et f_2 sont injectives et montrons que f l'est.

Soit $(a, b) \in E^2$ tel que $f(a) = f(b)$. Montrons que $a = b$.

Comme $f(a) = f(b)$, d'après la question (1), on ne peut pas avoir $a \in E_1$ et $b \in E_2$, ni $a \in E_2$ et $b \in E_1$.

Il reste donc deux cas possibles :

Cas 1 : $a \in E_1$ et $b \in E_1$, dans ce cas $f(a) = f_1(a)$ et $f(b) = f_1(b)$. On a donc $f_1(a) = f_1(b)$ et comme f_1 est injective, on déduit que $a = b$.

Cas 2 : $a \in E_2$ et $b \in E_2$, dans ce cas $f(a) = f_2(a)$ et $f(b) = f_2(b)$. On a donc $f_2(a) = f_2(b)$ et comme f_2 est injective, on déduit que $a = b$.

Dans les deux cas, $a = b$.

3. \Rightarrow) Supposons que f est surjective et montrons que f_1 et f_2 le sont.
 f_1 surjective? Soit $y \in F_1$, on a alors $y \in F$, et comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
 Si $x \in E_2$, on aurait $y = f(x) = f_2(x) \in F_2$, impossible. Ainsi $x \in E_1$ et $y = f(x) = f_1(x)$. Autrement dit, x est un antécédent de y par f_1 .
 Idem pour f_2 surjective.

\Leftarrow) Supposons que f_1 et f_2 sont surjectives et montrons que f l'est.

Soit $y \in F$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $y \in F_1$, comme f_1 est surjective, alors il existe $x \in E_1$ tel que $y = f_1(x)$ ainsi $y = f(x)$.

Cas 2 : $y \in F_2$, comme f_2 est surjective, alors il existe $x \in E_2$ tel que $y = f_2(x)$ ainsi $y = f(x)$.

Dans les deux cas, y possède un antécédent par f dans E .

Exercice 5 .

1. (a) - Réflexivité : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $x \leq x$ et $y \leq y$, ainsi $(x, y) \mathcal{R} (x, y)$.
 - Transitivité : soit $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ trois éléments de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \mathcal{R} (x', y') \text{ et } (x', y') \mathcal{R} (x'', y'') &\Rightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y'' \\ &\Rightarrow x \leq x'' \text{ et } y \leq y'' \\ &\Rightarrow (x, y) \mathcal{R} (x'', y'') \end{aligned}$$

- Antisymétrie : soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} (x, y) \mathcal{R} (x', y') \text{ et } (x', y') \mathcal{R} (x, y) &\Rightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' \leq x \text{ et } y' \leq y \\ &\Rightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ &\Rightarrow (x, y) = (x', y') \end{aligned}$$

Ainsi \mathcal{R} est une relation d'ordre sur \mathbb{R}^2 .

- (b) L'ordre \mathcal{R} est partiel car par exemple, les éléments $(0, 1)$ et $(1, 0)$ de \mathbb{R}^2 ne sont pas comparables (c.-à-d. non $(0, 1) \mathcal{R} (1, 0)$ et non $(1, 0) \mathcal{R} (0, 1)$).
- (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) \text{ est un majorant de } (1, 1) \text{ pour } \mathcal{R} \Leftrightarrow (1, 1) \mathcal{R} (x, y) \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } y \geq 1.$$

Ainsi, l'ensemble des majorants de $(1, 1)$ pour \mathcal{R} est le quart de plan situé à la fois à droite de la droite d'équation $x = 1$ et au-dessus de la droite d'équation $y = 1$, frontières incluses (faire un dessin).

2. (a) - Réflexivité : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $x = x$ et $y \leq y$, ainsi, la proposition $(x < x$ ou $(x = x$ et $y \leq y)$) est vraie. D'où $(x, y)\mathcal{S}(x, y)$.
 - Transitivité : soit $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$ trois éléments de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{S}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{S}(x'', y'') &\Rightarrow (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')) \text{ et } (x' < x'' \text{ ou } (x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')) \\ &\Rightarrow (x < x' \text{ et } x' < x'') \text{ ou } (x < x' \text{ et } x' = x'' \text{ et } y' \leq y'') \\ &\quad \text{ou } (x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' < x'') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' = x'' \text{ et } y' \leq y'') \end{aligned}$$

Examinons les quatre cas :

- le cas $(x < x' \text{ et } x' < x'')$ entraîne que $x < x''$.
 - le cas $(x < x' \text{ et } x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')$ entraîne que $x < x''$.
 - le cas $(x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' < x'')$ entraîne que $x < x''$.
 - le cas $(x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' = x'' \text{ et } y' \leq y'')$ entraîne que $x = x''$ et $y \leq y''$.
- Dans tous les cas, on a donc $x < x''$ ou $(x = x'' \text{ et } y \leq y'')$; ainsi $(x, y)\mathcal{S}(x'', y'')$.

- Antisymétrie : soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de \mathbb{R}^2 , on a :

$$\begin{aligned} (x, y)\mathcal{S}(x', y') \text{ et } (x', y')\mathcal{S}(x, y) &\Rightarrow (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')) \text{ et } (x' < x \text{ ou } (x' = x \text{ et } y' \leq y)) \\ &\Rightarrow (x < x' \text{ et } x' < x) \text{ ou } (x < x' \text{ et } x' = x \text{ et } y' \leq y) \\ &\quad \text{ou } (x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' < x) \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' = x \text{ et } y' \leq y) \end{aligned}$$

Examinons les quatre cas :

- le cas $(x < x' \text{ et } x' < x)$ est impossible.
- le cas $(x < x' \text{ et } x' = x \text{ et } y' \leq y')$ entraîne que $x < x$. Impossible
- le cas $(x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' < x)$ entraîne que $x < x$. Impossible
- ainsi, on a forcément le dernier cas $(x = x' \text{ et } y \leq y' \text{ et } x' = x \text{ et } y' \leq y)$ entraînant que $x = x'$ et $y = y'$.

On en déduit que $(x, y) = (x', y')$.

- (b) Soit $(x, y), (x', y')$ deux éléments de \mathbb{R}^2 . Montrons qu'ils sont comparables.

Distinguons les trois cas possibles :

- Cas 1 : $x < x'$, on a alors $(x, y)\mathcal{S}(x', y')$.
- Cas 2 : $x' < x$, on a alors $(x', y')\mathcal{S}(x, y)$.
- Cas 3 : $x = x'$: on distingue deux sous-cas :
 Sous-cas 1 : $y \leq y'$, alors $(x, y)\mathcal{S}(x', y')$
 Sous-cas 2 : $y > y'$, alors $y' \leq y$ alors $(x', y')\mathcal{S}(x, y)$.

Dans tous les cas, on a $(x, y)\mathcal{S}(x', y')$ ou $(x', y')\mathcal{S}(x, y)$. Ainsi (x, y) et (x', y') sont comparables et l'ordre \mathcal{S} est donc total.

- (c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$(x, y) \text{ est un majorant de } (1, 1) \text{ pour } \mathcal{S} \Leftrightarrow (1, 1)\mathcal{S}(x, y) \Leftrightarrow 1 < x \text{ ou } (x = 1 \text{ et } 1 \leq y).$$

Ainsi, l'ensemble des majorants de $(1, 1)$ pour \mathcal{S} est la région du plan située strictement à droite de la droite d'équation $x = 1$, à laquelle on ajoute la demi-droite formée par les points de coordonnées $(1, y)$ tel que $y \geq 1$ (faire un dessin).