

Corrigé DS5 Algèbre (05/03/2019)

Exercice 1 .

1. On a $V = \{a \cdot (4, 2, 1, 0) + b \cdot (0, 0, 0, 1), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{vect}((4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.
Ainsi, V est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 : c'est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par la famille $((4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

Montrons que W est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 :

On a : $(0, 0, 0, 0) \in W$.

Soit $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de W et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \cdot X + X' \in W$.

Comme $(X, X') \in W^2$, on a $x + z = y + t$ et $x' + z' = y' + t'$.

On a $\lambda \cdot X + X' = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t')$ avec :

$$(\lambda x + x') + (\lambda z + z') = \lambda(x + z) + (x' + z') = \lambda(y + t) + (y' + t') = (\lambda y + y') + (\lambda t + t').$$

Ainsi, $\lambda \cdot X + X' \in W$.

2. Par définition de V , la famille $((4, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ en est une famille génératrice, de plus, cette famille est libre ; c'est donc une base de V , et $\dim(V) = 2$.

Cherchons une base de W :

Soit $X = (x, y, z, t) \in W$, alors $x + z = y + t$ d'où $x = y + t - z$, alors

$$X = (y + t - z, y, z, t) = y \cdot (1, 1, 0, 0) + z \cdot (-1, 0, 1, 0) + t \cdot (1, 0, 0, 1).$$

Ainsi, $W \subset \text{vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$.

Réciproquement, $(1, 1, 0, 0) \in W$, $(-1, 0, 1, 0) \in W$ et $(1, 0, 0, 1) \in W$, d'où

$$W = \text{vect}((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)).$$

Montrons que la famille $((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est libre :

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \cdot (1, 1, 0, 0) + b \cdot (-1, 0, 1, 0) + c \cdot (1, 0, 0, 1) = 0$, alors $(a - b + c, a, b, c) = (0, 0, 0, 0)$ d'où $a = b = c = 0$.

On déduit que la famille $((1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1))$ est une base de W , et $\dim(W) = 3$.

Cherchons une base de $V \cap W$:

Soit $X = (x, y, z, t) \in V \cap W$:

• $X \in V \Rightarrow x = 4z$ et $y = 2z$

• $X \in W \Rightarrow x = y + t - z$

On obtient ainsi $4z = 2z + t - z$, d'où $t = 3z$ et $X = (4z, 2z, z, 3z) = z \cdot (4, 2, 1, 3)$, on déduit que $V \cap W \subset \text{vect}((4, 2, 1, 3))$. Réciproquement, $(4, 2, 1, 3) \in V \cap W$, ainsi $V \cap W = \text{vect}((4, 2, 1, 3))$.

Le vecteur $(4, 2, 1, 3)$ forme donc une base de $V \cap W$, et $\dim(V \cap W) = 1$.

3. On a $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4$.
 $V + W$ est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 , de dimension 4. On en déduit que $V + W = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2 .

1. On a clairement $0 \in G$.
Soit $(P, Q) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda \cdot P + Q \in G$.
Comme $(P, Q) \in G^2$, alors $P(1) = P'(1) = Q(1) = Q'(1) = 0$, d'où :
 $(\lambda \cdot P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$ et $(\lambda \cdot P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0$. Ainsi, $\lambda \cdot P + Q \in G$.

2. Cherchons une base de G (afin de calculer la dimension de G) :

Soit $P \in G$, alors $P(1) = P'(1) = 0$, alors 1 est une racine au moins double de P , donc P est divisible par $(X - 1)^2$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - 1)^2 Q$, avec $\deg(Q) \leq 1$ car $\deg(P) \leq 3$.

Le polynôme Q s'écrit alors $a + bX$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, d'où $P = (X - 1)^2(aX + b) = aX(X - 1)^2 + b(X - 1)^2$. On en déduit que $G \subset \text{vect}((X(X - 1)^2, (X - 1)^2))$.

Réciproquement, $X(X - 1)^2 \in G$ et $(X - 1)^2 \in G$ car ces deux polynômes sont divisibles par $(X - 1)^2$, d'où

$$G = \text{vect}((X(X - 1)^2, (X - 1)^2)).$$

De plus, la famille $((X(X - 1)^2, (X - 1)^2)$ est libre (famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts), c'est donc une base de G et $\dim(G) = 2$.

Montrons maintenant que la famille $((X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une base de G :

On a clairement $(X - 1)^2 \in G$ et $(X - 1)^3 \in G$ car ces deux polynômes sont divisibles par $(X - 1)^2$.

La famille $((X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est donc une famille libre (degrés distincts) de deux vecteurs de G , et comme G est de dimension 2, on en déduit qu'il s'agit d'une base de G .

3. Comme F est de dimension 2, il suffit de remarquer que la famille $(1, X - 1)$ est une famille libre de vecteurs F , ce qui est clair (degrés distincts).

4. Il suffit de vérifier deux parmi les trois conditions suivantes :

- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}_3[X])$
- $F + G = \mathbb{R}_3[X]$
- $F \cap G = \{0\}$

En effet :

• On a $\dim(F) + \dim(G) = 2 + 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}_3[X])$.

• $F + G = \text{vect}(1, X - 1) + \text{vect}((X - 1)^2, (X - 1)^3) = \text{vect}(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3) = \mathbb{R}_3[X]$

car la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est une famille libre contenant 4 vecteurs dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, elle engendre donc $\mathbb{R}_3[X]$.

• Soit $P \in F \cap G$, alors il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = a + b(X - 1)$ et $P = c(X - 1)^2 + d(X - 1)^3$, ainsi $a + b(X - 1) - c(X - 1)^2 - d(X - 1)^3 = 0$, d'où $a = b = c = d = 0$ car la famille $(1, X - 1, (X - 1)^2, (X - 1)^3)$ est libre. On en déduit que $P = 0$.

5. (a) On cherche $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $P = a + b(X - 1) + c(X - 1)^2 + d(X - 1)^3$, d'où

$$1 + X + X^2 + X^3 = (a - b + c - d) + (b - 2c + 3d)X + (c - 3d)X^2 + dX^3.$$

D'où le système

$$\begin{cases} d = 1 \\ c - 3d = 1 \\ b - 2c + 3d = 1 \\ a - b + c - d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 4 \\ b = 6 \\ a = 4 \end{cases}$$

On déduit que

$$1 + X + X^2 + X^3 = 4 + 6(X - 1) + 4(X - 1)^2 + (X - 1)^3.$$

(b) De la question précédente, on déduit directement que $P = P_1 + P_2$ avec :

- $P_1 = 4 + 6(X - 1) \in F$
- $P_2 = 4(X - 1)^2 + (X - 1)^3 \in G$.

Exercice 3 .

1. Il faut que $\text{rg}(\mathcal{F}) + \text{rg}(\mathcal{F}') < 3$.

On prend par exemple \mathcal{F} la famille formée par le vecteur $(1, 0, 0)$ et \mathcal{F}' la famille formée par le vecteur $(0, 1, 0)$.

On a clairement $\text{vect}(\mathcal{F}) \cap \text{vect}(\mathcal{F}') = \{0\}$ mais $\text{vect}(\mathcal{F}) + \text{vect}(\mathcal{F}') = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \neq \mathbb{R}^3$.

2. Il faut que $\text{vect}(\mathcal{F}) \cap \text{vect}(\mathcal{F}') \neq \{0\}$.
 On prend par exemple $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $\mathcal{F}' = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$.
 On a $\text{vect}(\mathcal{F}) + \text{vect}(\mathcal{F}') = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathbb{R}^3$ mais $\text{vect}(\mathcal{F}) \cap \text{vect}(\mathcal{F}') = \text{vect}((0, 1, 0))$.
3. On prend $\mathcal{F} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$ et $\mathcal{F}' = ((0, 0, 1))$.
 On a $\dim(\text{vect}(\mathcal{F})) + \dim(\text{vect}(\mathcal{F}')) = \text{rg}(\mathcal{F}) + \text{rg}(\mathcal{F}') = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $\text{vect}(\mathcal{F}) + \text{vect}(\mathcal{F}') = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \mathbb{R}^3$, ainsi $\text{vect}(\mathcal{F})$ et $\text{vect}(\mathcal{F}')$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

Exercice 4.

1. (a) On a $F \oplus G = \text{vect}(u_1, \dots, u_m) + \text{vect}(v_1, \dots, v_n) = \text{vect}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$, ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ engendre $F \oplus G$.
 Montrons que cette famille est libre :
 Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{m+n}$ tel que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0$. On a alors

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m}_{\in F} = -\underbrace{(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n)}_{\in G} \in F \cap G = \{0\}.$$

On en déduit que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = 0$ et $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0$; comme les familles (u_1, \dots, u_m) et (v_1, \dots, v_n) sont libres, on déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$.

Ainsi, la famille $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$ est libre. C'est donc une base de $F \oplus G$.

- (b) Dans la question précédente, on a trouvé une base de $F \oplus G$ contenant $m+n$ vecteurs. On déduit que

$$\dim(F \oplus G) = m + n = \dim(F) + \dim(G).$$

C'est la formule de Grassmann dans le cas où F et G sont en somme directe (car $F \cap G = \{0\}$).

2. (a) On a : $F = (F \cap G) \oplus H$, d'où

$$\dim(F) = \dim((F \cap G) \oplus H) = \dim(F \cap G) + \dim(H)$$

car $F \cap G$ et H sont en somme directe (on peut donc appliquer le résultat de la question 1).

- (b) Comme G est un sous-espace vectoriel de E , et $G \subset F + G$, alors G est un sous-espace vectoriel de $F + G$.

Comme H est un sous-espace vectoriel de F , et $H \subset F \subset F + G$, alors H est un sous-espace vectoriel de $F + G$.

- (c) Montrons que $G \cap H = \{0\}$.

Soit $x \in G \cap H$. Comme $H \subset F$, alors $x \in F$, ainsi, $x \in H$ et $x \in F \cap G$, or H et $F \cap G$ sont en somme directe, d'où $x = 0$.

Ou : comme $H \subset F$, alors $G \cap H \subset (F \cap G) \cap H = \{0\}$. Ainsi, $G \cap H = \{0\}$.

- (d) G et H étant des sous-espaces vectoriels de $F + G$, on a : $G + H \subset F + G$.

Réciproquement, montrons que $F + G \subset G + H$.

Soit $x \in F + G$, alors il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

Or $F = (F \cap G) + H$; comme $y \in F$, alors il existe $(t, u) \in (F \cap G) \times H$ tel que $y = t + u$.

Ainsi $x = z + t + u$ avec $z \in G$, $t \in F \cap G \subset G$ et $u \in H$. D'où

$$x = \underbrace{z + t}_{\in G} + \underbrace{u}_{\in H} \in G + H.$$

- (e) Des deux questions précédentes, on déduit que G et H sont supplémentaires dans $F + G$, autrement dit : $F + G = G \oplus H$.

- (f) Comme G et H sont en somme directe, d'après la question 1, on a $\dim(G \oplus H) = \dim(G) + \dim(H)$.
 D'autre part, d'après la question 2a, on a $\dim(H) = \dim(F) - \dim(F \cap G)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \dim(F + G) &= \dim(G \oplus H) \\ &= \dim(G) + \dim(H) \\ &= \dim(G) + \dim(F) - \dim(F \cap G) \end{aligned}$$