

## Corrigé DS6 Algèbre (17/05/2019)

**Exercice 1.**

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X = (x, y, z)$  et  $X' = (x', y', z')$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) \\ &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') - (\lambda z + z'), \lambda x + x' + \lambda y + y' - (\lambda z + z'), 3(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y') - (\lambda z + z')) \\ &= \lambda(2x - y - z, x + y - z, 3x - 3y - z) + (2x' - y' - z', x' + y' - z', 3x' - 3y' - z') \\ &= \lambda f(X) + f(X') \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire.

2. Soit  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(X) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

On résout ce système linéaire homogène par l'algorithme de Gauss en échelonnant sa matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en faisant successivement les opérations  $l_1 \leftrightarrow l_2, (l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1)$  et  $l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1$  puis  $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2$ . Ainsi,

$$X \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 3y \end{cases}$$

On en déduit que  $X = y(2, 1, 3)$  donc  $\text{Ker}(f) \subset \text{vect}((2, 1, 3))$ . Réciproquement,  $f(2, 1, 3) = (0, 0, 0)$  d'où

$$\text{Ker}(f) = \text{vect}((2, 1, 3)) \text{ de dimension 1.}$$

Par le théorème du rang, on déduit que  $\text{Im}(f)$  est de dimension 2. Deux vecteurs linéairement indépendants de  $\text{Im}(f)$  en forment une base. Par exemple,  $f(1, 0, 0) = (2, 1, 3)$  et  $f(0, 1, 0) = (-1, 1, -3)$ . Ainsi

$$\text{Im}(f) = \text{vect}((2, 1, 3), (-1, 1, -3)) \text{ de dimension 2.}$$

3. Comme  $(2, 1, 3) \in \text{Im}(f)$ , alors  $\text{vect}((2, 1, 3)) \subset \text{Im}(f)$ , ainsi  $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$ .
4. Comme  $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$ , alors  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \text{Ker}(f) \neq \{0\}$ , ainsi  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  ne sont pas en somme directe. Ils ne sont donc pas supplémentaires dans  $\mathbb{R}^3$ .
5. (a) Comme  $F = \text{Ker}(f - 2 \text{Id})$  est le noyau de l'endomorphisme  $f - 2 \text{Id}$  de  $\mathbb{R}^3$ , on déduit que c'est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .  
Déterminons-en une base.  
Soit  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On a :

$$X \in F \Leftrightarrow (f - 2 \text{Id})(X) = 0 \Leftrightarrow f(X) = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 2x \\ x + y - z = 2y \\ 3x - 3y - z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 3y - 3z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \end{cases}$$

On en déduit que  $X = y(0, 1, -1)$  donc  $F \subset \text{vect}((0, 1, -1))$ . Réciproquement,  $f(0, 1, -1) = 2(0, 1, -1)$  donc  $(0, 1, -1) \in F$ , d'où

$$F = \text{vect}((0, 1, -1)) \text{ de dimension } 1.$$

(b) Il suffit de montrer que  $(0, 1, -1) \in \text{Im}(f)$ , donc qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$(0, 1, -1) = \alpha(2, 1, 3) + \beta(-1, 1, -3).$$

On trouve  $\alpha = 1/3$  et  $\beta = 2/3$ . Ainsi,  $(0, 1, -1) \in \text{Im}(f)$ , d'où  $F = \text{vect}((0, 1, -1)) \subset \text{Im}(f)$ .

**Deuxième méthode :**  $X \in F \Rightarrow f(X) = 2X \Rightarrow X = f(\frac{1}{2}X) \in \text{Im}(f)$ . Ainsi  $F \subset \text{Im}(f)$ .

(c) D'après les questions (3) et (5b), on sait que  $\text{Ker}(f)$  et  $F$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\text{Im}(f)$ .

De plus :

- $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(F) = 1 + 1 = 2 = \dim(\text{Im}(f))$
- $F \cap \text{Ker}(f) = \{0\}$  car les deux vecteurs  $(2, 1, 3)$  et  $(0, 1, -1)$  ne sont pas colinéaires.

On en déduit que  $F$  et  $\text{Ker}(f)$  sont supplémentaires dans  $\text{Im}(f)$ .

### Exercice 2 .

1. Théorème du rang : si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $u$  un endomorphisme de  $E$ , alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$$

où  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ .

2. (a) Soit  $y \in \text{Im}(g \circ f)$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ , ainsi  $x \in \text{Im}(g)$

(car il existe  $x' = f(x) \in E$  avec  $z = g(x')$ ).

On déduit que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ .

(b) Soit  $x \in \text{Ker}(f)$ , alors  $f(x) = 0$ , alors  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ , ainsi  $x \in \text{Ker}(g \circ f)$ .

On déduit que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .

3. • Comme  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ , alors

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g). \tag{1}$$

• D'autre part, comme  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ , alors  $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(g \circ f))$ .

En utilisant théorème du rang pour les endomorphismes  $f$  et  $g \circ f$ , on obtient :

$$\dim(E) - \text{rg}(f) \leq \dim(E) - \text{rg}(g \circ f), \text{ ainsi}$$

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f). \tag{2}$$

• Les deux inégalités (1) et (2) donnent alors

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(g), \text{rg}(f)).$$

### Exercice 3 .

#### Partie I : Généralités

1. Si  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , alors il est clair que  $P^{-1}$  est un pseudo-inverse de  $P$ , en effet :

$$PP^{-1}P = P, \quad P^{-1}PP^{-1} = P^{-1}, \quad P^{-1}P = PP^{-1} = I_3.$$

2. La matrice  $PUP^{-1}$  est un pseudo-inverse de la matrice  $PBP^{-1}$ , en effet, par associativité du produit matriciel :

- $(PBP^{-1})(PUP^{-1})(PBP^{-1}) = PB \overbrace{P^{-1}P}^{I_3} U \overbrace{P^{-1}P}^{I_3} BP^{-1} = P(BUB)P^{-1} = PBP^{-1}$
- $(PUP^{-1})(PBP^{-1})(PUP^{-1}) = P(UBU)P^{-1} = PUP^{-1}$
- $(PUP^{-1})(PBP^{-1}) = P(UB)P^{-1} = P(BU)P^{-1} = (PBP^{-1})(PUP^{-1})$ .

3. (a) On a :  $AUAU' = (AUA)U' = AU'$ .  
 D'autre part,  $AUAU' = (AU)(AU') = (UA)(U'A) = U(AU'A) = UA$ .  
 Ainsi  $AU' = UA$ .
- (b) Comme  $AU' = UA$ , en multipliant par  $U$  à droite, on obtient  $AU'U = UAU$ , or
- $UAU = U$
  - $AU'U = (AU')U = (U'A)U = U'(AU) = U'(UA) = U'(AU') = U'$
- d'où  $U = U'$ . On en déduit l'unicité du pseudo-inverse.
- (c) On a :  $(AU)^2 = (AU)(AU) = A(UAU) = AU$ .

## Partie II : Exemple de calcul d'un pseudo-inverse

1. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en faisant d'abord les opérations  $l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$  et  $l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1$ , puis l'opération  $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_2$ .

On déduit que le rang de  $A$  est 2.

Comme  $\text{rg}(A) \neq 3$ , on déduit que  $A$  n'est pas inversible.

2. On a :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

en faisant successivement les opérations :  $l_1 \leftrightarrow l_2$ ,  $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1 + l_2$ .

(Remarque : cette dernière opération est la suite des deux opérations  $l_3 \leftarrow l_3 - 2l_1$  puis  $l_3 \leftarrow l_3 + l_2$ ).

On remarque que  $P$  est de rang 3, elle est donc inversible. On continue l'algorithme pour trouver  $P^{-1}$  :

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

en faisant successivement les opérations :

$l_3 \leftarrow \frac{1}{4}l_3$ , ( $l_1 \leftarrow l_1 + l_3$  et  $l_2 \leftarrow l_2 - l_3$ ), et enfin  $l_1 \leftarrow l_1 - 2l_2$ .

Ainsi

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (a) Par produit matriciel, on obtient :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b)  $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Inversons la matrice  $A_1$  par l'algorithme de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 4/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

en faisant successivement les opérations :

$l_1 \leftarrow \frac{1}{3}l_1$ ,  $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ ,  $l_2 \leftarrow \frac{3}{4}l_2$  et  $l_1 \leftarrow l_1 - \frac{5}{3}l_2$ .

On déduit que

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -5/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (c) On pose  $U' = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On vérifie par calcul que  $A'U'A' = A'$ ,  $U'A'U' = U'$  et que  $A'U' = U'A'$ . Ainsi  $U'$  est le pseudo-inverse de  $A'$ .
- (d) Comme  $U'$  est le pseudo-inverse de  $A'$ , alors  $PU'P^{-1}$  est le pseudo-inverse de  $A = PA'P^{-1}$ .  
Le pseudo-inverse de  $A$  est donc

$$U = PU'P^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -9 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$