karam.fayad@eisti.eu

Corrigé DS1 Algèbre (13/10/2017)

Exercice 1 .

1. $A : [(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [\overline{(P \Rightarrow Q)} \vee R] \Leftrightarrow [(P \wedge \overline{Q}) \vee R] \Leftrightarrow [(P \vee R) \wedge (\overline{Q} \vee R)]$
   $B : [(P \wedge Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow [\overline{(P \wedge Q)} \vee R] \Leftrightarrow [\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R]$
   $C : [P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [\overline{P} \vee (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [\overline{P} \vee \overline{Q} \vee R]$
   $D : [(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [(\overline{P} \vee R) \wedge (\overline{Q} \vee R)]$
   Ainsi, seules les propositions B et C sont équivalentes.
2. La négation de : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, \ \big([\exists (q_1,q_2) \in \mathbb{N}^2, (a = bq_1 \text{ et } b = cq_2)] \Rightarrow [\exists q_3 \in \mathbb{N}, a = cq_3] \big)$ est
$$\exists (a,b,c) \in \mathbb{N}^3, \ \big([\exists (q_1,q_2) \in \mathbb{N}^2, (a = bq_1 \text{ et } b = cq_2)] \wedge [\forall q_3 \in \mathbb{N}, a \neq cq_3] \big).$$

Exercice 2 .

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.
Rappelons d'abord que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \qquad (\star)$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $1^3 = 1^2$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ et montrons que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2$.
En effet :

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= [1^3 + 2^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3 \\
&= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 && \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 && \text{par } (\star) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1 \right) \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right) \\
&= \frac{(n+1)^2 (n+2)^2}{4} \\
&= (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2 && \text{par } (\star)
\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout entier naturel n non nul, on a : $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$.

Exercice 3 .

1. Montrons que $A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \setminus B = A \setminus C$. Autrement dit, que :
$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}.$$

   $\Rightarrow$)
   Supposons que $A \cap B = A \cap C$, et montrons (par double inclusion) que $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$.
   Soit $a \in A \cap \overline{B}$, alors $a \in A$ et $a \notin B$.
   Montrons que $a \in A \cap \overline{C}$. Par l'absurde, si $a \in C$, alors $a \in A \cap C = A \cap B$, alors $a \in B$. Contradiction.
   Donc $a \notin C$, d'où $a \in A \cap \overline{C}$.
   Conclusion : $A \cap \overline{B} \subset A \cap \overline{C}$.
   L'autre inclusion se montre de la même façon, en échangeant les rôles de B et C.

   $\Leftarrow$)
   On utilise le résultat de la première implication, en remplaçant B par $\overline{B}$ et C par $\overline{C}$. Autrement dit : si $A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C}$ alors d'après la première implication $A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap \overline{\overline{C}}$, d'où $A \cap B = A \cap C$.

2. (a) Soit E l'ensemble de l'alphabet, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a\}$ et $C = \{a, d\}$.
On a bien $A \setminus B = A \setminus C = \{b, c\}$ et $B \neq C$.

(b) Soit E l'ensemble de l'alphabet, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, d\}$ et $C = \{b, d\}$.
On a bien $B \setminus A = C \setminus A = \{d\}$ et $B \neq C$.

(c) Supposons que ($A \setminus B = A \setminus C$ et $B \setminus A = C \setminus A$) et montrons, par double inclusion, que $B = C$.

Soit $a \in B$, montrons que $a \in C$. Raisonnons par disjonction des cas.
Cas 1 : $a \in A$, alors $a \in A \cap B = A \cap C$ (car l'égalité $A \setminus B = A \setminus C$ est équivalente à $A \cap B = A \cap C$, d'après (1)), alors $a \in C$.
Cas 2 : $a \notin A$, alors $a \in B \setminus A = C \setminus A$, alors $a \in C$.
Dans les deux cas, on a bien $a \in C$. D'où $B \subset C$.

L'inclusion $C \subset B$ se montre de la même façon, en échangeant les rôles de B et C.

Exercice 4 .

1. Supposons que $B \setminus C \subset A$ et $C \setminus D \subset A$ et montrons que $B \setminus D \subset A$.

Soit $a \in B \setminus D$, donc $a \in B$ et $a \notin D$. Montrons que $a \in A$. Raisonnons par disjonction des cas :
Cas 1 : $a \in C$, alors $a \in C \setminus D \subset A$, alors $a \in A$.
Cas 2 : $a \notin C$, alors $a \in B \setminus C \subset A$, alors $a \in A$.
Dans les deux cas, on a bien $a \in A$.

2. — Réflexivité : Montrons que $\forall\ B \in \mathscr{P}(E)$, $B \mathscr{R}_A B$.
Soit $B \in \mathscr{P}(E)$, on a $B \Delta B = \emptyset \subset A$, d'où $B \mathscr{R}_A B$.

— Symétrie : Montrons que $\forall\ B, C \in \mathscr{P}(E)$, $(B \mathscr{R}_A C \ \Rightarrow\ C \mathscr{R}_A B)$.
Soit $B, C \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $B \mathscr{R}_A C$, alors $B \Delta C \subset A$, alors $C \Delta B \subset A$ (car Δ est commutatif), alors $C \mathscr{R}_A B$

— Transitivité : Montrons que $\forall\ B, C, D \in \mathscr{P}(E)$, $(B \mathscr{R}_A C$ et $C \mathscr{R}_A D \ \Rightarrow B \mathscr{R}_A D)$.
Soit $B, C, D \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $B \mathscr{R}_A C$ et $C \mathscr{R}_A D$, alors $B \Delta C \subset A$ et $C \Delta D \subset A$, alors $(B \setminus C) \cup (C \setminus B) \subset A$ et $(C \setminus D) \cup (D \setminus C) \subset A$.
On a donc les quatre inclusions : $B \setminus C \subset A$, $C \setminus B \subset A$, $C \setminus D \subset A$ et $D \setminus C \subset A$. D'après (1) :
• les inclusions $B \setminus C \subset A$ et $C \setminus D \subset A$ entraînent que $B \setminus D \subset A$
• les inclusions $D \setminus C \subset A$ et $C \setminus B \subset A$ entraînent que $D \setminus B \subset A$

D'où $(B \setminus D) \cup (D \setminus B) \subset A$, c'est-à-dire $B \Delta D \subset A$. D'où $B \mathscr{R}_A D$.

Exercice 5 .
$\Rightarrow$)
Supposons que la relation $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive et montrons qu'elle est réflexive et circulaire.
— $\mathscr{R}$ réflexive : rien à montrer.
— $\mathscr{R}$ circulaire : montrons que $\forall\ a, b, c \in E, \quad (a \mathscr{R} b)$ et $(b \mathscr{R} c) \Rightarrow (c \mathscr{R} a)$.
Soit $a, b, c \in E$. Supposons que $a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} c$, alors par transtivité on a $a \mathscr{R} c$, puis par symétrie on a $c \mathscr{R} a$.

$\Leftarrow$)
Supposons que la relation $\mathscr{R}$ est réflexive et circulaire, et montrons qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.
— $\mathscr{R}$ réflexive : rien à montrer.
— $\mathscr{R}$ symétrique : montrons que $\forall\ a, b \in E$, $(a \mathscr{R} b \ \Rightarrow\ b \mathscr{R} a)$.
Soit $a, b \in E$. Supposons que $a \mathscr{R} b$, on a donc $a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} b$ (par réflexivité), d'où $b \mathscr{R} a$ (car $\mathscr{R}$ est circulaire).
— $\mathscr{R}$ transitive : montrons que $\forall\ a, b, c \in E$, $(a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} c \ \Rightarrow\ a \mathscr{R} c)$.
Soit $a, b, c \in E$. Supposons que $a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} c$, alors on a $c \mathscr{R} a$ (car $\mathscr{R}$ est circulaire), d'où $a \mathscr{R} c$ (car $\mathscr{R}$ est symétrique).