

Corrigé Partiel Algèbre (17/06/2019)

Exercice 1 .**PARTIE I :**

1. On a :

$$\det(A - mI_3) = \begin{vmatrix} 4-m & 3 & 3 \\ 3 & 4-m & 3 \\ 3 & 3 & 4-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10-m & 3 & 3 \\ 10-m & 4-m & 3 \\ 10-m & 3 & 4-m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10-m & 3 & 3 \\ 0 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & 1-m \end{vmatrix}$$

en faisant successivement les opérations $c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + c_3$ puis $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ et $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$. Ainsi

$$\boxed{\det(A - mI_3) = (10 - m)(1 - m)^2}$$

2. $A - mI_3$ est inversible $\Leftrightarrow \det(A - mI_3) \neq 0$, ainsi

$$\boxed{A - mI_3 \text{ est inversible } \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ et } m \neq 10}$$

3. Si $m = 0$, $\det(A - mI_3) = \det(A) = 10 \neq 0$, ainsi

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3}$$

PARTIE II :1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f - 10 \text{ Id}) &\Leftrightarrow (f - 10 \text{ Id})(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (A - 10I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(f - 10 \text{ Id}) = \text{vect}((1, 1, 1))}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f - \text{Id}) &\Leftrightarrow (f - \text{Id})(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = (-y - z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{vect}((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))}$$

3. (a) Le déterminant de la matrice de la famille \mathcal{C} dans la base \mathcal{B} est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Ce déterminant étant non nul, on en déduit que

$$\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

(b) On a :

$$\bullet f(\varepsilon_1) = f(1, 1, 1) = (10, 10, 10) = 10\varepsilon_1$$

$$\bullet f(\varepsilon_2) = f(1, 0, -1) = (1, 0, -1) = \varepsilon_2$$

$$\bullet f(\varepsilon_3) = f(0, 1, -1) = (0, 1, -1) = \varepsilon_3$$

ainsi la matrice D de f dans la base \mathcal{C} est

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} est la matrice de la famille \mathcal{C} dans la base \mathcal{B} :

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(d) La matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} est P^{-1} . Par calcul (en utilisant la formule $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} {}^t \text{com}(P)$ ou à l'aide de l'algorithme de Gauss), on trouve

$$\boxed{P^{-1} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

(e) La formule de changement de base donne :

$$\boxed{D = P^{-1}AP}$$

Le calcul (à faire) redonne le résultat de la question (3b).

(f) Par la formule de changement de base, on a $A = PDP^{-1}$, ainsi, par récurrence simple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ avec

$$D^n = \begin{pmatrix} 10^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10^n + 2 & 10^n - 1 & 10^n - 1 \\ 10^n - 1 & 10^n + 2 & 10^n - 1 \\ 10^n - 1 & 10^n - 1 & 10^n + 2 \end{pmatrix}}$$

(g) On explicite l'expression de $(10^n - 1)A + (10 - 10^n)I_3$:

- chaque coefficient sur la diagonale vaut $4(10^n - 1) + (10 - 10^n) = 3 \times 10^n + 6$

- les autres coefficients valent chacun $3(10^n - 1)$

On déduit donc que

$$\boxed{(10^n - 1)A + (10 - 10^n)I_3 = 9A^n}$$

Il est également possible de faire une preuve par récurrence.

PARTIE III :

1. D'après l'énoncé, à la fin de chaque année, et simultanément, chaque compte perd 60% de son montant (donc lui reste 40%) et gagne 30% des montants de chacun des deux autres comptes, ce qui donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0.4x_n + 0.3y_n + 0.3z_n \\ y_{n+1} = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.3z_n \\ z_{n+1} = 0.3x_n + 0.3y_n + 0.4z_n \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \frac{1}{10}AV_n$$

Ainsi

$$V_{n+1} = \frac{1}{10}AV_n$$

3. Faire une récurrence simple.
4. On a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{10}A\right)^n &= \frac{1}{10^n}A^n = \frac{1}{3 \times 10^n} \begin{pmatrix} 10^n + 2 & 10^n - 1 & 10^n - 1 \\ 10^n - 1 & 10^n + 2 & 10^n - 1 \\ 10^n - 1 & 10^n - 1 & 10^n + 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{10^n} & 1 - \frac{1}{10^n} & 1 - \frac{1}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 1 + \frac{2}{10^n} & 1 - \frac{1}{10^n} \\ 1 - \frac{1}{10^n} & 1 - \frac{1}{10^n} & 1 + \frac{2}{10^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}A\right)^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Les deux questions précédentes donnent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x_0 + y_0 + z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\text{À long terme, chaque compte contiendra le montant } \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0)$$

Exercice 2 .

1. Par définition de F , la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ engendre F . Montrons que cette famille est libre.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$. Montrons que $a = b = c = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $ae^x + be^{2x} + ce^{3x} = 0$.

En divisant par e^{3x} , on obtient $ae^{-2x} + be^{-x} + c = 0$, puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c = 0$.

On a donc pour tout réel x , $ae^x + be^{2x} = 0$. En divisant par e^{2x} puis en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $b = 0$

On a donc pour tout réel x , $ae^x = 0$, donc $a = 0$. Ainsi

$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } F}$

2. (a) On a : $\psi(f_1) = (f_1(0), f_1(1), f_1(2)) = (1, e, e^2)$. De même, $\psi(f_2) = (1, e^2, e^4)$ et $\psi(f_3) = (1, e^3, e^6)$.
Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & e^2 & e^3 \\ e^2 & e^4 & e^6 \end{pmatrix}$$

- (b) On a :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e & e^2 & e^3 \\ e^2 & e^4 & e^6 \end{vmatrix} = e^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ 1 & e^2 & e^4 \end{vmatrix} = e^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e-1 & e^2-1 \\ 0 & e^2-1 & e^4-1 \end{vmatrix} = e^3(e-1)(e^2-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & e+1 \\ 0 & 1 & e^2+1 \end{vmatrix}$$

en "factorisant" la deuxième ligne par e et la troisième ligne par e^2 , puis en faisant les opérations $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ et $l_3 \leftarrow l_3 - l_1$, puis en "factorisant" la deuxième ligne par $e-1$ et la troisième ligne par e^2-1 . On développe ensuite par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{aligned} \det(A) &= e^3(e-1)(e^2-1)(e^2-e) \\ &= e^4(e-1)^3(e+1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\det(A) = e^4(e-1)^3(e+1)}$$

- (c) Comme $\det(A) \neq 0$, on déduit que

$\boxed{\psi \text{ est un isomorphisme}}$

Exercice 3 .

1. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(P) &= (2X-1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P' \\ &= -a - \frac{1}{2}b + (2a-b-c)X + (b-c - \frac{3}{2}d)X^2 - dX^3 - dX^4 \end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\varphi(P) \in \mathbb{R}_4[X]}$$

2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (2X - 1)(\lambda P + Q) - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)(\lambda P + Q)' \\ &= (2X - 1)(\lambda P + Q) - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)(\lambda P' + Q') \\ &= \lambda \left[(2X - 1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P' \right] + (2X - 1)Q - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)Q' \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)\end{aligned}$$

ainsi

φ est une application linéaire

3. (a) On a : $\varphi(1) = -1 + 2X$, $\varphi(X) = -\frac{1}{2} - X + X^2$, $\varphi(X^2) = -X - X^2$ et $\varphi(X^3) = -\frac{3}{2}X^2 - X^3 - X^4$.
La matrice A de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est donc

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$$

(b) Par échelonnement, on trouve que le rang de A est 4. Il est aussi possible de raisonner avec les mineurs en trouvant un (ici l'unique) mineur de taille 4 non nul, par exemple

$$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Ainsi le rang de φ est 4.

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(\varphi) = 4$$

(c) Comme $\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi)) = 4 < 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$, alors

φ n'est pas surjective

(d) Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \text{rg}(\varphi) = 4 - 4 = 0$. Ainsi

φ est injective

(e) Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$\begin{aligned}\varphi(P) = 1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - \frac{1}{2}b = 1 \\ 2a - b - c = 0 \\ b - c - \frac{3}{2}d = 0 \\ d = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (a, b, c, d) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation $\varphi(P) = 1$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}_3[X]$ possède une solution unique :

$$P = -\frac{2}{3}(1 + X + X^2)$$

Exercice 4 .

1. (a) On a par exemple $I_3 = M(0, 0) \in E$, mais $I_3 + I_3 = 2I_3 \notin E$. Ainsi

L'ensemble E n'est pas stable par addition

(b) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\det(M(a, b)) = 1 \neq 0$, ainsi $M(a, b) \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$, d'où

$$E \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$$

- (c) • $I_3 = M(0, 0) \in E$.
 • Montrons que E est stable par produit matriciel.
 Soit $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$M(a, b)M(a', b') = \begin{pmatrix} 1 & a + a' & aa' + b + b' \\ 0 & 1 & a + a' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(a + a', aa' + b + b') \in E$$

- Montrons que E est stable par passage à l'inverse.
 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$M(a, b)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 - b \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(-a, a^2 - b) \in E$$

On en déduit que

E est un sous-groupe de $\text{GL}_3(\mathbb{R})$

2. (a) On a :

$$\widehat{M}(0) = M(0, 0) = I_3$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{M}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On peut faire le calcul, ou utiliser la partie (1) de l'exercice :

$$\begin{aligned} \widehat{M}(x)\widehat{M}(y) &= M\left(x, \frac{x^2}{2}\right)M\left(y, \frac{y^2}{2}\right) \\ &= M\left(x + y, xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right) \quad \text{d'après (1c)} \\ &= M\left(x + y, \frac{(x + y)^2}{2}\right) \\ &= \widehat{M}(x + y) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x + y)$$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\widehat{M}(x)\widehat{M}(-x) = \widehat{M}(x-x) = \widehat{M}(0) = I_3$. Ainsi

$$\boxed{\widehat{M}(x) \text{ est inversible d'inverse } \widehat{M}(-x)}$$

(d) • Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{M}(x) = M\left(x, \frac{x^2}{2}\right) \in E$. Ainsi $F \subset E$.

• $I_3 = \widehat{M}(0) \in F$.

• F est stable par produit matriciel, car pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x+y) \in F$, d'après la question (2b)

• F est stable par passage à l'inverse car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{M}(x)^{-1} = \widehat{M}(-x) \in F$, d'après la question (2c).

On en déduit que

$$\boxed{F \text{ est un sous-groupe de } E}$$

3. (a) Par récurrence simple :

• pour $n = 0$, $(\widehat{M}(x))^0 = I_3$ et $\widehat{M}(0x) = \widehat{M}(0) = I_3$.

• soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $(\widehat{M}(x))^n = \widehat{M}(nx)$, alors

$$\begin{aligned} (\widehat{M}(x))^{n+1} &= \widehat{M}(x)(\widehat{M}(x))^n \\ &= \widehat{M}(x)\widehat{M}(nx) \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &= \widehat{M}(x+nx) \quad \text{par la question (2b)} \\ &= \widehat{M}((n+1)x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, (\widehat{M}(x))^n = \widehat{M}(nx)}$$

(b) Le résultat précédent reste vrai pour $n = -1$, d'après la question (2c).

Plus généralement, si $n < 0$, on a :

$$\begin{aligned} (\widehat{M}(x))^n &= (\widehat{M}(x)^{-1})^{-n} \\ &= (\widehat{M}(-x))^{-n} \\ &= \widehat{M}((-n)(-x)) \quad \text{d'après (3a) car } -n > 0 \\ &= \widehat{M}(nx) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{Z}, (\widehat{M}(x))^n = \widehat{M}(nx)}$$