EISTI	**Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année** **Devoir surveillé 1** *N. Arancibia, S. El Sayed, K. Fayad, J.-M. Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 13 octobre 2017**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

◇◇◇

Exercice 1. (3 points)

1. Soit P, Q et R trois propositions et :

— $A : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$
— $B : (P \text{ et } Q) \Rightarrow R$
— $C : P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$
— $D : (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$

Y a-t-il parmi A, B, C et D des propositions qui sont équivalentes ? Si oui, lesquelles ?

2. Écrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3,\ \Big([\exists (q_1,q_2) \in \mathbb{N}^2, (a = bq_1 \text{ et } b = cq_2)] \Rightarrow [\exists q_3 \in \mathbb{N}, a = cq_3] \Big).$$

Exercice 2. (3 points)
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Exercice 3. (6 points)
Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

1. Montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \Longleftrightarrow A \setminus B = A \setminus C.$$

2. (a) Donner un exemple où $A \setminus B = A \setminus C$ et $B \neq C$.
   (b) Donner un exemple où $B \setminus A = C \setminus A$ et $B \neq C$.
   (c) Montrer que si $(A \setminus B = A \setminus C$ et $B \setminus A = C \setminus A)$ alors $B = C$.

Exercice 4. (5 points)
Soit E un ensemble.

1. Soit A, B, C et D quatre parties de E. Montrer que

$$(B \setminus C \subset A \text{ et } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A.$$

2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On définit sur $\mathscr{P}(E)$ la relation binaire $\mathscr{R}_A$ par :

$$\forall\ B, C \in \mathscr{P}(E),\ \ (B \mathscr{R}_A C \Leftrightarrow B \Delta C \subset A).$$

Montrer que $\mathscr{R}_A$ est réflexive, symétrique et transitive.
On rappelle que pour $B, C \in \mathscr{P}(E)$, $B \Delta C = (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

Exercice 5. (3 points)
Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble E est dite circulaire si

$$\forall\ a, b, c \in E,\ \ (a \mathscr{R} b) \text{ et } (b \mathscr{R} c) \Rightarrow (c \mathscr{R} a).$$

Montrer l'équivalence :

$$\mathscr{R} \text{ est réflexive, symétrique et transitive } \Leftrightarrow \mathscr{R} \text{ est réflexive et circulaire.}$$