Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Département de Mathématiques
Année universitaire 2016-2017

DS1 du 13/10/2016

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI** $1^{ère}$ **année - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

— *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
— *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif.*
Ce DS est composé d'un QCM, de quatre exercices indépendants et d'un exercice bonus.

Q.C.M. 1 *[3 points]* Réponse exacte (0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).
Aucune justification n'est demandée. **[Les réponses doivent être directement écrites sur la copie]**

1. Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :
   A : Si f est injective alors tout élément de E a plus d'une image dans F.
   B : Si f est injective alors tout élément de F a au plus un antécédent dans E.
   C : Si f est surjective alors tout élément de F a au moins un antécédent dans F.
   D : Si f n'est pas bijective alors au moins un élément de F n'a pas antécédent.
   E : Si f n'est pas injective alors il existe deux éléments distincts de E ayant la même image.
2. Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :
   A : $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
   B : $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
   C : $(n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
   D : $(n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$
   E : $(n > 0) \Rightarrow (2n > n)$
   F : $(n \geq 0) \Rightarrow (2n > n)$
   G : $(n \geq 0) \Rightarrow ((n+1) > n)$

Exercice 1 *[5 points]*
Vous êtes commissaire de police, chargé d'élucider le casse d'une banque. Vous savez que le(s) coupable(s) du cambriolage sont parmi les trois suspects : Arsène, Bonnie et Clyde.
Issus d'une source sûre, les indices suivants sont tous exacts :
— I_1 : si Bonnie a trempé dans cette affaire, Clyde aussi.
— I_2 : pour les hold-up de banques, Arsène a horreur de faire équipe avec Clyde.
— I_3 : si Arsène est coupable et Bonnie innocente, alors Clyde est coupable.
— I_4 : Si Clyde est dans le coup, il n'a pas pu faire ce genre de boulot tout seul.

À l'aide de tableaux de vérité, déterminer le ou les coupables du cambriolage.
Indication : noter A la proposition "Arsène est coupable" (de même pour B et C), et exprimer les indices I_1, I_2, I_3, I_4 *en fonction de A, B et C.*

Tournez svp →

Exercice 2 *[3 points]*
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Exercice 3 *[5 points]*
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y)$$

Soit $\mathcal{S}$ la relation définie sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{S}y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 \leq x - y)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Démontrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $\mathcal{R}(x) = \{x, 1 - x\}$
3. Démontrer que la relation $\mathcal{S}$ est réflexive, transitive, mais qu'elle n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.
4. Soit $I = [1/2; +\infty[$. Soit $\mathcal{S}'$ la relation définie sur I par

   $$\forall x, y \in I, \quad (x\mathcal{S}'y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 \leq x - y)$$

   Montrer que $\mathcal{S}'$ est une relation d'ordre sur I.
5. Démontrer que :

   $$\forall x, y \in I, \quad (x\mathcal{S}'y) \Leftrightarrow (x \leq y)$$

Exercice 4 *[4 points]*
Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A; X \cap B) \end{array}$$

Montrer que :

1. f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. f est surjective si et seulement $A \cap B = \emptyset$.

Fin.

Exercice 5 *Bonus [2.5 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). Aucune justification n'est demandée.
Préciser si ces fonctions sont "bijective", "injective et non surjective", "surjective et non injective" ou "non injective et non surjective" :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(x) = x$
4. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 20x + 2$
6. $f : \mathbb{R} \to \{3\}$ telle que $f(x) = 3$
7. $f : \{22\} \to \{22; 12\}$ telle que $f(x) = 22$
8. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1/x$
9. $f : \{0\} \to \{0\}$ telle que $f(x) = 0$
10. $f : \{1\} \to \{0.5\}$ telle que $f(x) = 1/(x + 1)$