

Q.C.M. 1 [3 points] Réponse exacte (0.5pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.5pt).

Aucune justification n'est demandée. **[Les réponses doivent être directement écrites sur la copie]**

- Soient E et F deux ensembles et f une application de E vers F. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :
 - A : Si f est injective alors tout élément de E a plus d'une image dans F.
 - B : Si f est injective alors tout élément de F a au plus un antécédent dans E.**
 - C : Si f est surjective alors tout élément de F a au moins un antécédent dans E.
 - D : Si f n'est pas bijective alors au moins un élément de F n'a pas antécédent.
 - E : Si f n'est pas injective alors il existe deux éléments distincts de E ayant la même image.**
- Soit n un entier naturel quelconque. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies :
 - A : $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 3)$
 - B : $(n \geq 5) \Rightarrow (n > 6)$
 - C : $(n \geq 5) \Rightarrow (n \leq 6)$
 - D : $(n < 2) \Rightarrow (n^2 = n)$
 - E : $(n > 0) \Rightarrow (2n > n)$
 - F : $(n \geq 0) \Rightarrow (2n > n)$
 - G : $(n \geq 0) \Rightarrow ((n + 1) > n)$

Exercice 1 [5 points]

Vous êtes commissaire de police, chargé d'élucider le casse d'une banque. Vous savez que le(s) coupable(s) du cambriolage sont parmi les trois suspects : Arsène, Bonnie et Clyde.

Issus d'une source sûre, les indices suivants sont tous exacts :

- I_1 : si Bonnie a trempé dans cette affaire, Clyde aussi.
- I_2 : pour les hold-up de banques, Arsène a horreur de faire équipe avec Clyde.
- I_3 : si Arsène est coupable et Bonnie innocent, alors Clyde est coupable.
- I_4 : Si Clyde est dans le coup, il n'a pas pu faire ce genre de boulot tout seul.

À l'aide de tableaux de vérité, déterminer le ou les coupables du cambriolage.

Indication : noter A la proposition "Arsène est coupable" (de même pour B et C), et exprimer les indices I_1, I_2, I_3, I_4 en fonction de A, B et C.

Soit A la proposition "Arsène est coupable", B la proposition "Bonnie est coupable" et C la proposition "Clyde est coupable". Alors :

- I_1 s'écrit : $B \Rightarrow C$
- I_2 s'écrit : $A \Rightarrow \overline{C}$ c'est-à-dire $\overline{A \cap C}$, ou encore $\overline{A} \cup \overline{C}$
- I_3 s'écrit : $(A \cap \overline{B}) \Rightarrow C$
- I_4 s'écrit : $C \Rightarrow (A \cup B)$

Enfin, on sait que $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$. Voici le tableau de vérité

A	B	C	I_1	I_2	I_3	I_4	I
V	V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F

La proposition I équivaut à $\bar{A} \cap B \cap C$.

Autrement dit : Bonnie et Clyde sont coupables, et Arsène est innocent.

Exercice 2 [3 points] Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

INITIALISATION : Pour $n = 0$, $2^0 = 1 > 0$. L'inégalité à démontrer est donc vraie quand $n = 0$.

RÉCURRENCE : Soit $n \geq 0$. Supposons que $2^n > n$ et montrons que $2^{n+1} > n + 1$.

$$\begin{aligned}
 2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\
 &\geq 2(n+1) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\
 &\geq n+1 + n+1 \\
 &> n+1.
 \end{aligned}$$

CONCLUSION : On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$$

Exercice 3 [5 points] Soit \mathcal{R} la relation définie sur l'ensemble des réels \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y)$$

Soit \mathcal{S} la relation définie sur l'ensemble des réels \mathbb{R} par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x\mathcal{S}y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 \leq x - y)$$

1. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence :

La relation \mathcal{R} est

(a) Réflexive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x^2 = x - x \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$$

(b) Symétrie :

$$\begin{aligned}
 \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y) \\
 &\Rightarrow (y^2 - x^2 = y - x) \\
 &\Rightarrow y\mathcal{R}x
 \end{aligned}$$

(c) Transitive :

$$\begin{aligned}
 \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y) \text{ et } (y^2 - z^2 = y - z) \\
 &\Rightarrow (x^2 - z^2 = x - z) \\
 &\Rightarrow x\mathcal{R}z
 \end{aligned}$$

Donc \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

2. Démontrer pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $\mathcal{R}(x) = \{x, 1 - x\}$:

Par définition, la classe d'équivalence de x est $\mathcal{R}(x) = \{y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y\}$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = x - y \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y) = 0 \text{ ou } (x + y - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } y = 1 - x \end{aligned}$$

Finalemment $\mathcal{R}(x) = \{y \in \mathbb{R}, y = x \text{ ou } y = 1 - x\} = \{x; 1 - x\}$.

3. Démontrer que la relation \mathcal{S} est réflexive, transitive, mais qu'elle n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.

La relation \mathcal{S} est :

(a) Réflexive :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x^2 \leq x - x \Leftrightarrow x\mathcal{S}x$$

(b) Transitive :

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{S}z &\Leftrightarrow (x^2 - y^2 \leq x - y) \text{ et } (y^2 - z^2 \leq y - z) \\ &\Rightarrow (x^2 - z^2 \leq x - z) \\ &\Rightarrow x\mathcal{S}z \end{aligned}$$

(c) Non symétrie : il existe x et y tel que $x\mathcal{S}y$ et $\overline{y\mathcal{S}x}$

$$\begin{aligned} 0\mathcal{S}2 &\Leftrightarrow 0^2 - 2^2 \leq 0 - 2 \\ 2\mathcal{S}0 &\Leftrightarrow 2^2 - 0^2 > 2 - 0 \end{aligned}$$

(d) Non anti-symétrie : il existe x et y tel que $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}x$ et $x \neq y$

$$\begin{aligned} 0\mathcal{S}1 &\Leftrightarrow 0^2 - 1^2 \leq 0 - 1 \\ 1\mathcal{S}0 &\Leftrightarrow 1^2 - 0^2 \leq 1 - 0 \end{aligned}$$

4. Soit $I = [1/2; +\infty[$. Soit \mathcal{S}' la relation définie sur I par

$$\forall x, y \in I, \quad (x\mathcal{S}'y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 \leq x - y)$$

Montrer que \mathcal{S}' est une relation d'ordre sur I .

La relation \mathcal{S}' est réflexive et transitive car la relation \mathcal{S} l'est (car ce qui est vrai sur \mathbb{R} reste vrai sur un sous-ensemble de \mathbb{R}). Il ne reste qu'à démontrer qu'elle est anti-symétrique.

Soit I l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à $1/2$.

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I, \quad x\mathcal{S}'y \text{ et } y\mathcal{S}'x &\Rightarrow (x^2 - y^2 = x - y) \\ &\Rightarrow y = x \text{ ou } y = 1 - x \end{aligned}$$

d'après la question 2. Or

— si $x > 1/2$, alors $1 - x < 1/2$,

— si $x = 1/2$, alors $1 - x = 1/2$.

Donc si x et y sont à la fois éléments de I et vérifient $x\mathcal{S}'y$ et $y\mathcal{S}'x$, alors $x = y$: donc \mathcal{S}' est anti-symétrique.

Finalemment la relation \mathcal{S}' est une relation d'ordre.

5. Démontrer que :

$$\forall x, y \in I, \quad (x\mathcal{S}'y) \Leftrightarrow (x \leq y)$$

Soient x et y deux éléments de I :

- Si $x = y = 1/2$, on a $xS'y \Leftrightarrow x \leq y$.
- Si x ou y est strictement supérieur à $1/2$, alors $x + y - 1$ est strictement positif. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2 \leq x - y) &\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - y \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \leq y\end{aligned}$$

Exercice 4 [4 points]

Soient A et B deux parties d'un ensemble E et

$$\begin{aligned}f : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A; X \cap B)\end{aligned}$$

Montrer que :

1. f est injective si et seulement si $E = A \cup B$.
— Supposons f injective, ie

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E), \quad f(X) = f(Y) \Rightarrow X = Y.$$

Montrons que $E = A \cup B$.

On a $E, A, B \in \mathcal{P}(E)$. De plus

$$f(E) = (E \cap A; E \cap B) = (A; B) = f(A \cup B)$$

Comme f est injective, il vient $E = A \cup B$.

- Supposons $E = A \cup B$. Montrons que f est injective.

Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Supposons $f(X) = f(Y)$ ie $(X \cap A; X \cap B) = (Y \cap A; Y \cap B)$.

Montrons que $X = Y$. On a :

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y$$

Ainsi f est injective.

2. f est surjective si et seulement $A \cap B = \emptyset$.

- Supposons f surjective, ie que pour tout élément dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, il existe au moins un antécédent X dans $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie $f(X) = (X \cap A; X \cap B)$. En particuliers, l'élément $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ possède au moins un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$. De plus, on a :

$$A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset.$$

- Supposons $A \cap B = \emptyset$. Soit $(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Pour $X = A' \cup B'$, on a

$$f(X) = ((A' \cap A) \cup (B' \cap A); (A' \cap B) \cup (B' \cap B)) = (A', B')$$

car $A' \cap A = A', B' \cap A = \emptyset$.

Exercice 5 Bonus [2.5 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). Aucune justification n'est demandée.

Préciser si ces fonctions sont "bijective", "injective et non surjective", "surjective et non injective" ou "non injective et non surjective" :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$:

non injective (4 a deux antécédents différents) **et non surjective** (-7 n'a pas d'antécédent)

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(x) = x^2$:
surjective et non injective (4 a deux antécédents différents)
3. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(x) = x$: **bijective**
4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 2x$:
injective et non surjective (-2 n'a pas d'antécédent)
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 20x + 2$: **bijective**
6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \{3\}$ telle que $f(x) = 3$:
surjective et non injective (14 a une infinité d'antécédents différents)
7. $f : \{22\} \rightarrow \{22; 12\}$ telle que $f(x) = 22$:
injective et non surjective (12 n'a pas d'antécédent)
8. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 1/x$:
injective et non surjective (0 n'a pas d'antécédent)
9. $f : \{0\} \rightarrow \{0\}$ telle que $f(x) = 0$: **bijective**
10. $f : \{1\} \rightarrow \{0.5\}$ telle que $f(x) = 1/(x + 1)$: **bijective**