Cycle préparatoire 1ère année

Devoir surveillé 2

N. Arancibia, S. El Sayed, K. Fayad, J.-M. Masereel

Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 17 novembre 2017**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
	Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (3 points)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ une application. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire $\mathscr{R}$ par :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \big(x\mathscr{R}y \iff xf(y)=yf(x)\big).$$

Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
Indication : pour la transitivité, on pourra calculer $xzf(y)$.

Exercice 2. (5 points)
Soit $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x)=2+x^2$.
Dans chacun des cas suivants, étudier l'injectivité et la surjectivité de f. Si f est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque.

1. $E=F=\mathbb{R}$.
2. $E=]-\infty,0]$ et $F=[2,+\infty[$.

Exercice 3. (5 points)

1. *Question préliminaire*
   Soit E un ensemble non vide et a et b deux éléments de E. On note φ_a et φ_b les applications constantes de E dans E de valeur a et b, respectivement, c.-à-d. : $\forall\ x\in E,\ \varphi_a(x)=a$ et $\varphi_b(x)=b$.
   Montrer que : $\varphi_a=\varphi_b \iff a=b$.
2. Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application. Le but de cette question est de montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

   (A) : f est injective

   (B) : pour tout ensemble X et pour toutes applications φ et ψ de X dans E, on a :

   $$f\circ\varphi=f\circ\psi \Rightarrow \varphi=\psi.$$

   (a) Montrer d'abord que (A) $\Rightarrow$ (B).

   (b) Montrer ensuite (B) $\Rightarrow$ (A).
   Indication : on pourra utiliser la question préliminaire.

Exercice 4. (4 points)
On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \varphi(n) = \begin{cases} -2n-1 & \text{si } n < 0 \\ 2n & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \end{array}$$

Montrer que φ est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5. (3 points)
Soit $a \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que 6 divise $a(a^2-1)$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, 6 divise $a(a^{2n}-1)$.