

DS2 - CORRECTION

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI 1^{ère} année - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
 - *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
 - *Le barème est signalé à titre indicatif.*
- Ce DS est composé d'un Vrai-Faux, de trois exercices indépendants et d'un exercice bonus.*

Vrai-Faux 1 [4 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
[Les réponses doivent être directement écrites sur la copie]. Aucune justification n'est demandée.

1. Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :
 - A : Tout nombre réel a pour argument principal 0.
 - B : Tout nombre réel strictement négatif a pour argument principal π .
 - C : Tout nombre imaginaire pur non nul a pour argument principal $\pi/2$ ou $-\pi/2$.
 - D : Le conjugué d'un nombre imaginaire pur est égal à son opposé.
 - E : Si deux nombres complexes ont même argument, alors leur produit est réel.
 - F : Le produit de deux nombres imaginaires purs est réel.
 - G : Si deux nombres complexes non nuls ont même argument, alors leur quotient est réel.
 - H : Si deux nombres complexes non nuls ont même module, alors leur quotient a pour module 1.

2. Soit z un nombre complexe non nul. Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :
 - A : Le module de z est égal au module de son conjugué.
 - B : L'argument principal de z est l'opposé de l'argument principal de son conjugué.
 - C : Le produit de z par une racine n -ième de l'unité a le même module que z .
 - D : L'argument de $-z$ est l'opposé de l'argument de z .
 - E : Si la partie imaginaire de z est positive, alors son argument est compris entre 0 et π .
 - F : L'argument principal de z^2 est le double de l'argument principal de z .
 - G : Tout argument de z/\bar{z} est un argument de z^2 .
 - H : \bar{z} est le symétrique de z par rapport à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 1 [8 points]

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1. $z^2 + iz + 5 - 5i = 0$

Le discriminant de $z^2 + iz + 5 - 5i = 0$ est $\Delta = -21 + 20i$.

On cherche les racines carrées de Δ , ie on cherche $\delta = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\delta^2) = \operatorname{Re}(\Delta) \\ \operatorname{Im}(\delta^2) = \operatorname{Im}(\Delta) \\ |\delta^2| = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = 20 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{841} (= \sqrt{29^2}) \end{cases}$$

Ce qui donne $x = \pm 2$ et $y = \pm 5$. Or $xy > 0$, donc x et y sont de même signe. Les racines carrées de Δ sont donc

$$\delta = 2 + 5i \quad -\delta = -2 - 5i$$

Finalement, les racines de l'équation sont

$$z_1 = 1 + 2i \quad z_2 = -1 - 3i$$

2. $z^5 + i = 0$:

On cherche donc les racines cinquièmes de $-i$. On pose $z = re^{it}$ et on écrit $-i$ sous sa forme exponentielle : $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Alors $z^5 = -i$ si et seulement si $(re^{it})^5 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, ie

$$\begin{cases} r^5 = 1 \\ 5t \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ t = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$$

Finalement, les cinq racines cinquièmes de $-i$ sont :

$$e^{i(4k-1)\frac{\pi}{10}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

3. $1 + \frac{z+i}{z-i} + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$

Soit z une solution de cette équation. On a nécessairement $z \neq i$.

Posons $Z = \frac{z+i}{z-i}$. alors ce complexe vérifie $1 + Z + Z^2 + Z^3 = 0$.

Remarquons que $Z \neq 1$ car il n'existe pas de complexe z tel que $\frac{z+i}{z-i} = 1$. Donc

$1 + Z + Z^2 + Z^3 = \frac{1 - Z^4}{1 - Z}$ (suite géométrique de raison Z) et Z vérifie $1 - Z^4 = 0$.

Le complexe Z est donc la racine quatrième de l'unité, différente de 1, ie $Z = i, -1, -i$.

Or comme $Z = \frac{z+i}{z-i}$, il vient alors que $z = i\frac{Z+1}{Z-1}$. On en déduit les trois solutions

$$z_1 = 1 \quad z_2 = 0 \quad z_3 = -1$$

Exercice 2 [3 points]

On définit la relation \mathcal{S} par :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1 \mathcal{S} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|$$

1. Montrer que \mathcal{S} est une relation d'équivalence :

\mathcal{S} est une relation d'équivalence si et seulement elle est réflexive, symétrique et transitive.

— Réflexive : montrons que $\forall z \in \mathbb{C}, z \mathcal{S} z$.

Soit $z \in \mathbb{C} : z \mathcal{S} z \Leftrightarrow |z| = |z|$ ce qui est toujours vrai.

— Symétrique : montrons que $\forall z, z' \in \mathbb{C}, z \mathcal{S} z' \Rightarrow z' \mathcal{S} z$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C} : z \mathcal{S} z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \Leftrightarrow |z'| = |z| \Leftrightarrow z' \mathcal{S} z$

— Transitive : montrons que $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, (z \mathcal{S} z' \text{ et } z' \mathcal{S} z'') \Rightarrow z \mathcal{S} z''$.

Soient $z, z' \in \mathbb{C} : z \mathcal{S} z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \Leftrightarrow |z'| = |z| \Leftrightarrow z' \mathcal{S} z$

2. Déterminer $\mathcal{S}(1 - 2i)$.

Par définition :

$$\mathcal{S}(1 - 2i) = \{z \in \mathbb{C}, z \mathcal{S}(1 - 2i)\} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = |1 - 2i|\} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{5}\}$$

Exercice 3 [5 points]

On définit l'application

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

1. Montrer que f est injective.

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, supposons $f(z_1) = f(z_2)$. alors :

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \\ &\Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_2 - i)(z_1 + i) \\ &\Leftrightarrow z_1 z_2 + i z_1 - i z_2 + 1 = z_1 z_2 + i z_2 - i z_1 + 1 \\ &\Leftrightarrow 2i z_1 = 2i z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Donc f est injective.

2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $1 - f(z) \neq 0$.

En déduire que f n'est pas surjective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans \mathbb{C} .

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a :

$$1 - f(z) = 1 - \frac{z-i}{z+i} = \frac{z+i - (z-i)}{z+i} = \frac{2i}{z+i} \neq 0$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f(z) \neq 1$, c'est-à-dire que 1 n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ par f : donc f n'est pas surjective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans \mathbb{C} .

3. Montrer que

$$f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Cette proposition est une égalité, et ce démontre donc par double inclusion.

D'après la question précédente, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ alors $f(z) \neq 1$: cela signifie que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, autrement dit

$$f(\mathbb{C} \setminus \{-i\}) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

Montrons alors l'autre inclusion : Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, montrons qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ qui vérifie $Z = f(z)$. Alors

$$\begin{aligned} Z = f(z) &\Leftrightarrow Z = \frac{z-i}{z+i} &&\Leftrightarrow Z(z+i) = (z-i) \\ &\Leftrightarrow zZ + iZ = z - i &&\Leftrightarrow zZ - z = -i - iZ \\ &\Leftrightarrow z(Z-1) = -i(Z+1) &&\Leftrightarrow z = -i \frac{Z+1}{Z-1} \end{aligned}$$

De plus, pour $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

On a ainsi montré que si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors $Z \in f(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$, ce qui signifie

$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$$

D'où l'égalité.

On en déduit que f est surjective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et donc bijective.

4. Montrer que

$$1 - |f(z)|^2 = 4 \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z+i|^2}$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on a :

$$\begin{aligned}
 1 - |f(z)|^2 &= 1 - \left| \frac{z-i}{z+i} \right|^2 &= 1 - \frac{|z-i|^2}{|z+i|^2} \\
 &= 1 - \frac{(z-i)(\overline{z-i})}{(z+i)(\overline{z+i})} &= 1 - \frac{(z-i)(\overline{z+i})}{(z+i)(\overline{z-i})} \\
 &= \frac{(z+i)(\overline{z-i}) - (z-i)(\overline{z+i})}{(z+i)(\overline{z-i})} &= \frac{|z^2| - iz + i\overline{z} + 1 - (|z^2| + iz - i\overline{z} + 1)}{|z+i|^2} \\
 &= \frac{-2iz + 2i\overline{z}}{|z+i|^2} &= -\frac{2i(z-\overline{z})}{|z+i|^2}
 \end{aligned}$$

Fin.

Exercice 4 Bonus [2.5 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
[Les réponses doivent être directement écrites sur la copie]. Aucune justification n'est demandée.

Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logiques suivants : \Rightarrow , \Leftarrow , \Leftrightarrow , \subset , \supset , \leq , \geq ou $=$:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 4 \quad \Leftarrow \quad x = 2$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, xy = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0 \text{ et } y = 0$
3. $\forall A, B, C \subset E, ((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \quad \subset \quad (A \cup B)$
4. $\forall A, B, C \subset E, ((A \cup B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \quad = \quad (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$
5. $\forall z \in \mathbb{C}, z = \overline{z} \quad \Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{R}$
6. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2|$
7. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 - z_2| \quad \geq \quad ||z_1| - |z_2||$
8. $\forall x \in \mathbb{R}, x = \pi \quad \Rightarrow \quad e^{2ix} = 1$
9. $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \quad \leq \quad |z|$
10. $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \quad \geq \quad \operatorname{Im}(z)$