EISTI	**Cycle préparatoire 1ère année** **Devoir surveillé 3** *Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel*	
	Matière : **Algèbre**	*Date* : **Vendredi 14 décembre 2018**
	Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (10 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que y est un *inverse de x modulo n* lorsque $xy \equiv 1[n]$.

1. Montrer l'équivalence : x possède un inverse modulo $n \iff x \wedge n = 1$.
2. (a) Montrer que si $x \wedge n = 1$ et y_1 et y_2 sont des inverses de x modulo n, alors $y_1 \equiv y_2[n]$.
   On parle alors de l'unicité de l'inverse de x modulo n.
   (b) Déterminer l'inverse de x modulo n dans chacun des cas suivants :
   i. $x = 3$, $n = 5$ ii. $x = 4$, $n = 25$ iii. $x = 3$, $n = 10$
3. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \wedge n = 1$, alors l'équation $ax \equiv b[n]$ possède une unique solution modulo n.
   (b) Résoudre :
   i. $2x \equiv 7[7]$ ii. $3x \equiv 25[38]$
4. Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$. On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} x \equiv a_1[n_1] \\ x \equiv a_2[n_2] \end{cases}$$

   où n_1 et n_2 sont deux entiers naturels tels que $n_1 \wedge n_2 = 1$.
   (a) Montrer que si x_0 est une solution du système, alors l'ensemble des solutions est

$$\{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv x_0[n_1 n_2]\}.$$

   (b) Justifier que n_1 possède un inverse y_1 modulo n_2 et que n_2 possède un inverse y_2 modulo n_1.
   (c) Montrer que $a_1 n_2 y_2 + a_2 n_1 y_1$ est solution du système.
   (d) Déterminer alors toutes les solutions du système.
5. Résoudre, *à l'aide de la méthode détaillée à la question précédente*, le système

$$\begin{cases} x \equiv 3[4] \\ x \equiv 2[9] \end{cases}$$

Exercice 2. (3 points)

1. Décomposer 2520 et 26400 en produit de facteurs premiers puis déduire $2520 \wedge 26400$.
2. (a) Déterminer des coefficients de Bézout pour les deux entiers 462 et 294.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation diophantienne $462x + 294y = 84$.

Exercice 3. (7 points)
On note $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs d'un entier $n \in \mathbb{Z}$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (k,l) & \longmapsto & kl \end{array}$$

1. Le but de cette question est d'étudier l'injectivité de φ.
   (a) On suppose que $a \wedge b = 1$.
      i. Soit $(k,l) \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$. Montrer que $k \wedge l = 1$.
      ii. Montrer que φ est injective.
   (b) On suppose que $a \wedge b \neq 1$. Montrer que φ n'est pas injective.
   (c) Déduire que : φ est injective $\Leftrightarrow a \wedge b = 1$.
2. Le but de cette question est d'étudier la surjectivité de φ.
   (a) Soit p un nombre premier qui ne divise pas ab. Déterminer $\varphi^{-1}(\{p\})$.
   (b) En déduire que φ n'est pas surjective.
3. Le but de cette question est de déterminer $\varphi(\mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b))$.
   (a) Justifier que $\varphi(\mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)) \subset \mathcal{D}(ab)$.
   (b) Montrer l'inclusion réciproque.