Département de Mathématiques
Année universitaire 2016-2017

DS3 du 05/01/2017

Matière : **Algèbre**
Filière : **CPI** $1^{ère}$ **année - Pau**
Durée : **2h**
Responsable : **Barrau Nelly**

— *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
— *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être justifiées.*
— *Le barème est signalé à titre indicatif.*
Ce DS est composé d'un Vrai-Faux, de trois exercices indépendants et d'un exercice bonus.

Vrai-Faux 1 *[5.5 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).
[RÉPONSES DIRECTEMENT ÉCRITES SUR LA COPIE]. Aucune justification n'est demandée.
Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :

1. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels, $d \in \mathbb{N}$:
   A : $deg(P) = d \Rightarrow deg(P') = d - 1.$
   B : $deg(P) = d \Rightarrow deg(P(X^2)) = 2d.$
   C : $deg(P) = 2 \Rightarrow deg(X^2 + P) = 2.$
   D : $deg(P) = 4 \Rightarrow deg(X^2 + P) = 4.$
   E : $deg(P) = d \Rightarrow deg(X^2 P(X+2)) = d+2.$

2. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls à coefficients réels :
   A : $deg(P + Q) = deg(P) + deg(Q).$
   B : $deg(P + Q) = deg(P)$ OU $deg(Q).$
   C : $(P \wedge Q = 1) \Rightarrow (P \wedge (P + Q) = 1).$
   D : $(P \wedge Q = 1) \Rightarrow (P^2 \wedge Q^2 = 1).$
   E : $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q).$
   F : $deg(PQ') = deg(P'Q).$
   G : P ne divise pas $Q \Rightarrow P$ ne divise pas Q^2
   H : P ne divise pas $Q^2 \Rightarrow P \wedge Q = 1$
   I : Le degré de $P(X^2)Q(X^2)$ est le double de la somme des degrés de P et de Q.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non nul à coefficients réels :
   A : $(X^2 - X)|P \Rightarrow P(1) = 0$
   B : $(X^2 - X)|P \Rightarrow P'(0) = 0$
   C : $(X - 1)^2|P \Rightarrow P'(1) = 0$
   D : $P(1) = P'(1) = 0 \Rightarrow (X - 1)^2|P$
   E : $P'(1) = 0 \Rightarrow (X - 1)|P$
   F : P irréductible $\Rightarrow P$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
   G : P irréductible $\Rightarrow deg(P') \in \{0, 1\}$
   H : P ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \Rightarrow P$ irréductible

Exercice 1 *[5 points]*
Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + j = -j^2$.
2. Montrer que j est une racine double de P.
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P, ainsi que leurs ordres de multiplicité.
4. Quel est le degré de P ? Quel est son coefficient dominant ? P est-il normalisé ?
5. Factoriser P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}$, puis dans $\mathbb{R}$.

Tournez svp $\rightarrow$

Exercice 2 *[5 points]*

1. En utilisant l'identité $(X^3 - 1) = (X - 1)(X^2 + X + 1)$, montrer que les polynômes $X^3 + 1$ et $X^2 + X + 1$ sont premiers entre eux.
2. Effectuer la division euclidienne $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$.
3. Justifier l'existence et déterminer l'ensemble des couples de polynômes (U, V) de $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$(X^3 + 1)U + (X^2 + X + 1)V = 1$$
4. Déterminer une décomposition en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes $X^3 - 1$ et $X^5 - X^3 + X^2 - 1$. En déduire leur pgcd et leur ppcm.
Indication : $(X^3 + 1)|(X^5 - X^3 + X^2 - 1)$.
5. Retrouver le pgcd de $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ et $X^3 - 1$ par l'algorithme d'Euclide.

Exercice 3 *[4.5points]* Outre le fait que la décomposition en éléments simples sert dans le calcul des intégrales, cet outil est également très utile pour le calcul de certaines sommes.

1. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $\dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$.
2. En déduire que
$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{2}{N+1} - 3.$$
3. Par passage à la limite et sachant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$.

Fin.

Exercice 4 *Bonus [2.5 points]* Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt). **[RÉPONSES DIRECTEMENT ÉCRITES SUR LA COPIE]**. Aucune justification n'est demandée.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes non nuls, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logiques suivants : $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$ ou $=$:
$A :\ deg(P) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\ P$ polynôme constant
$B :\ b|a$ ET $a|b \quad \cdots\cdots\cdots \quad a = b$ OU $a = -b$
$C :\ deg(PQ) \quad \cdots\cdots\cdots \quad deg(P) + deg(Q)$
$D :\ a|(b + c) \quad \cdots\cdots\cdots \quad a|b$ ET $a|c$
$E :\ val(PQ) \quad \cdots\cdots\cdots \quad val(P) + val(Q)$
$F :\ a|(bc) \quad \cdots\cdots\cdots \quad a|b$
2. Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :
$A :\ X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
$B :\ X^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
$C :\ X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
$D :$ Si P est de degré impair, alors P possède au plus une racine réelle.