

**Vrai-Faux 1** [5.5 points] Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).  
[RÉPONSES DIRECTEMENT ÉCRITES SUR LA COPIE]. Aucune justification n'est demandée.  
Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :

- Soient  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul à coefficients réels,  $d \in \mathbb{N}$  :
  - A :  $\deg(P) = d \Rightarrow \deg(P') = d - 1$ . **FAUX**
  - B :  $\deg(P) = d \Rightarrow \deg(P(X^2)) = 2d$ . **VRAI**
  - C :  $\deg(P) = 2 \Rightarrow \deg(X^2 + P) = 2$ . **FAUX**
  - D :  $\deg(P) = 4 \Rightarrow \deg(X^2 + P) = 4$ . **VRAI**
  - E :  $\deg(P) = d \Rightarrow \deg(X^2P(X+2)) = d + 2$ . **VRAI**
- Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes non nuls à coefficients réels :
  - A :  $\deg(P + Q) = \deg(P) + \deg(Q)$ . **FAUX**
  - B :  $\deg(P + Q) = \deg(P)$  OU  $\deg(Q)$ . **FAUX**
  - C :  $(P \wedge Q = 1) \Rightarrow (P \wedge (P + Q) = 1)$ . **VRAI**
  - D :  $(P \wedge Q = 1) \Rightarrow (P^2 \wedge Q^2 = 1)$ . **VRAI**
  - E :  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ . **VRAI**
  - F :  $\deg(PQ') = \deg(P'Q)$ . **FAUX**
  - G :  $P$  ne divise pas  $Q \Rightarrow P$  ne divise pas  $Q^2$ . **FAUX**
  - H :  $P$  ne divise pas  $Q^2 \Rightarrow P \wedge Q = 1$ . **FAUX**
  - I : Le degré de  $P(X^2)Q(X^2)$  est le double de la somme des degrés de  $P$  et de  $Q$ . **VRAI**
- Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  un polynôme non nul à coefficients réels :
  - A :  $(X^2 - X) | P \Rightarrow P(1) = 0$ . **VRAI**
  - B :  $(X^2 - X) | P \Rightarrow P'(0) = 0$ . **FAUX**
  - C :  $(X - 1)^2 | P \Rightarrow P'(1) = 0$ . **VRAI**
  - D :  $P(1) = P'(1) = 0 \Rightarrow (X - 1)^2 | P$ . **VRAI**
  - E :  $P'(1) = 0 \Rightarrow (X - 1) | P$ . **FAUX**
  - F :  $P$  irréductible  $\Rightarrow P$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . **FAUX**
  - G :  $P$  irréductible  $\Rightarrow \deg(P') \in \{0, 1\}$ . **VRAI**
  - H :  $P$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R} \Rightarrow P$  irréductible. **FAUX**

**Exercice 1** [5 points]

Soit  $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ .

- Montrer que  $1 + j = -j^2$ .  
Plusieurs méthodes possibles, dont par exemple  $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$  car  $j^3 = 1$ .  
D'où le résultat. [0.5pt]
- Montrer que  $j$  est une racine double de  $P$ .  
 $P(j) = (j + 1)^7 - j^7 - 1 = 0$  :  $j$  est au moins racine simple.  
 $P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$ , d'où  $P'(j) = 0$  :  $j$  est au moins racine double.  
 $P'' = 42(X + 1)^5 - 42X^5$ , d'où  $P''(j) \neq 0$  :  $j$  est racine double exactement. [1pt]  
 $Rq$  :  $j$  étant racine double complexe, alors  $\bar{j}$  est également racine double.



4. Déterminer une décomposition en produits de polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  des polynômes  $X^3 - 1$  et  $X^5 - X^3 + X^2 - 1$ . En déduire leur pgcd et leur ppcm.

*Indication :*  $(X^3 + 1) \mid (X^5 - X^3 + X^2 - 1)$ .

On trouve

$$X^5 - X^3 + X^2 - 1 = (X^2 - 1)(X^3 + 1) = (X + 1)^2(X - 1)(X^2 - X + 1)$$

et

$$X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

Le PGCD des deux polynômes est  $X - 1$ , le PPCM est  $(X + 1)^2(X - 1)(X^2 + X + 1)$ .

5. Retrouver le pgcd de  $X^5 - X^3 + X^2 - 1$  et  $X^3 - 1$  par l'algorithme d'Euclide.

La division euclidienne des deux polynômes donne :

$$X^5 - X^3 + X^2 - 1 = (X^2 - 1)(X^3 - 1) + 2(X^2 - 1)$$

La division euclidienne de  $X^3 - 1$  par  $X^2 - 1$  donne

$$X^3 - 1 = X(X^2 - 1) + (X - 1).$$

L'algorithme d'Euclide se termine par :  $X^2 - 1 = (X + 1)(X - 1) + 0$ . On retrouve donc bien que  $(X - 1)$  est le PGCD des deux polynômes.

**Exercice 3** [4.5points] Outre le fait que la décomposition en éléments simples sert dans le calcul des intégrales, cet outil est également très utile pour le calcul de certaines sommes.

1. Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}[X]$  le polynôme  $\frac{1}{k^2(k+1)^2}$ .

La forme générale de la décomposition de éléments simples de cette fraction rationnelle est

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k^2} + \frac{c}{k+1} + \frac{d}{(k+1)^2}$$

— **Pour trouver**  $b$  : on multiplie l'équation par  $k^2$ , puis on prend  $k = 0$ . On obtient  $b = 1$ .

— **Pour trouver**  $d$  : on multiplie l'équation par  $(k+1)^2$ , puis on prend  $k = -1$ . On obtient  $d = 1$ .

— **Pour trouver**  $a$  et  $c$  : on prend deux valeurs particulières (comme par exemple 1 et 2). On obtient :  $a = -2$  et  $c = 2$

Finalement

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{2}{N+1} - 3.$$

D'après 1), on a

$$\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$$

Par passage à la somme pour  $k = 1$  à  $k = N$ , il vient

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k+1)^2} + 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k+1} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

En utilisant deux changements de variables, on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{k=2}^{N+1} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$$

En jouant sur les indices de sommes, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2(k+1)^2} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2} \right) + 2 \left( \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} + \frac{1}{N+1} \right) - 2 \left( 1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - 1 + \frac{1}{(N+1)^2} + 2 \frac{1}{N+1} - 2 \\ &= 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{2}{N+1} - 3. \end{aligned}$$

3. Par passage à la limite et sachant  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , calculer  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ .  
En faisant tendre  $N \rightarrow +\infty$  dans le résultat de la question 2), il vient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2(k+1)^2} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 3 = \frac{\pi^2}{3} - 3$$

*Fin.*

**Exercice 4 Bonus [2.5 points]** Réponse exacte (0.25pt), Pas de réponse (0pt), Réponse fausse (-0.25pt).  
**[RÉPONSES DIRECTEMENT ÉCRITES SUR LA COPIE].** Aucune justification n'est demandée.  
Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[X]$  deux polynômes non nuls,  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ .

1. Compléter les pointillés par l'un des connecteurs logiques suivants :  $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow, \leq, \geq$  ou  $=$  :

$$A : \deg(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P \text{ polynôme constant}$$

$$B : b|a \text{ ET } a|b \quad \Rightarrow \quad a = b \text{ OU } a = -b$$

$$C : \deg(PQ) \quad = \quad \deg(P) + \deg(Q)$$

$$D : a|(b+c) \quad \Leftarrow \quad a|b \text{ ET } a|c$$

$$E : \text{val}(PQ) \quad = \quad \text{val}(P) + \text{val}(Q)$$

$$F : a|(bc) \quad \Leftarrow \quad a|b$$

2. Indiquer si ces affirmations sont vraies ou fausses :

$$A : X^2 + 4 \text{ est irréductible dans } \mathbb{C}[X]. \quad \mathbf{FAUX}$$

$$B : X^2 - 2 \text{ est irréductible dans } \mathbb{R}[X]. \quad \mathbf{FAUX}$$

$$C : X^2 + 1 \text{ est irréductible dans } \mathbb{R}[X]. \quad \mathbf{VRAI}$$

$$D : \text{Si } P \text{ est de degré impair, alors } P \text{ possède au plus une racine réelle.} \quad \mathbf{FAUX}$$