<table>
<tr><td rowspan="4">EISTI</td><td colspan="2">Cycle préparatoire 1^{ère} année
Devoir surveillé 6
Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel</td></tr>
<tr><td>Matière : Algèbre</td><td>Date : Vendredi 17 mai 2019</td></tr>
<tr><td>Appareils électroniques et documents interdits</td><td>Durée : 2 heures</td></tr>
<tr><td></td><td>Nombre de pages : 2</td></tr>
</table>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1. (7 points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application donnée par

$$f(x, y, z) = (2x - y - z, x + y - z, 3x - 3y - z).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
4. $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.
5. Soit $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$, où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base en précisant le système linéaire homogène à résoudre.
   (b) Montrer que $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f) \oplus F$.

Exercice 2. (3 points)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f et g deux endomorphismes de E.

1. Rappeler le théorème du rang.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$
3. En déduire que $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$.

Exercice 3. (11 points)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A et U deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que U est un *pseudo-inverse* de A lorque les trois relations suivantes sont vérifiées :

1. $AUA = A$
2. $UAU = U$
3. $UA = AU$

On rappelle que $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I : Généralités

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que P possède un pseudo-inverse que l'on déterminera.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant un pseudo-inverse U et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   Montrer que la matrice PBP^{-1} possède un pseudo-inverse que l'on déterminera.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant deux pseudo-inverses U et U'.
   (a) En calculant $AUAU'$ de deux manières différentes, montrer que $UA = AU'$.
   (b) En déduire que $U = U'$.
   (c) Montrer que $(AU)^2 = AU$.

Partie II : Exemple de calcul d'un pseudo-inverse

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'inverse de la matrice A, si c'est possible.
2. Calculer l'inverse de la matrice P, si c'est possible.
3. On pose $A' = P^{-1}AP$.
   (a) Montrer que $A' = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels à déterminer.
   (b) On pose $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de A_1.
   (c) On pose $U' = \begin{pmatrix} a' & b' & 0 \\ c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que U' est le pseudo-inverse de A'.
4. En déduire le pseudo-inverse U de A.