



Cycle préparatoire 1^{ère} année

Examen de fin de semestre

Nelly Barrau, Karam Fayad, Khaoula Guezguez, Jean-Michel Masereel

Matière : Algèbre

Date : Lundi 17 juin 2019

Appareils électroniques et documents interdits

Durée : 3 heures

Nombre de pages : 3

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Le barème (sur 50) est donné à titre indicatif. Il sera ultérieurement ramené sur 20.

Exercice 1. (22 points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de \mathbb{R}^3 .

PARTIE I : La matrice $A - mI_3$.

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère dans cette partie la matrice

$$A - mI_3 = \begin{pmatrix} 4 - m & 3 & 3 \\ 3 & 4 - m & 3 \\ 3 & 3 & 4 - m \end{pmatrix}.$$

1. Calculer en fonction de m le déterminant de $A - mI_3$.
2. Pour quelles valeurs de m la matrice $A - mI_3$ est-elle inversible?
3. L'endomorphisme f est-il un automorphisme? Justifier.

PARTIE II : Calcul des puissances de A .

1. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f - 10 \text{Id})$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f - \text{Id})$.
3. On pose

$$\varepsilon_1 = (1, 1, 1), \quad \varepsilon_2 = (1, 0, -1), \quad \varepsilon_3 = (0, 1, -1).$$

- (a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Sans utiliser la formule de changement de base, donner la matrice D de f dans la base \mathcal{C} .
- (c) Donner la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{C} .

- (d) Calculer la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} .
- (e) Retrouver le résultat de la question (4b) à l'aide de la formule de changement de base.
- (f) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- (g) Vérifier la relation :

$$A^n = \frac{1}{9} [(10^n - 1)A + (10 - 10^n)I_3].$$

PARTIE III : Application.

Trois comptes financiers X , Y et Z sont manipulés de la façon suivante : à la fin de chaque année, et simultanément, 30% de chaque compte est versé sur chacun des deux autres comptes. Mis à part ces mouvements, il n'y a ni apport ni retrait sur ces comptes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note x_n, y_n et z_n les montants au cours de l'année n des comptes X, Y et Z , respectivement (pour simplifier, on suppose que les montants initiaux correspondent à l'année 0); et on pose

$$V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, donner $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ en fonction de x_n, y_n, z_n .
2. En déduire que $V_{n+1} = \frac{1}{10}AV_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{1}{10^n}A^n V_0$.
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}A\right)^n$.
5. Interpréter ce résultat.

Exercice 2. (6 points)

Dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère les trois fonctions $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$ et $f_3 : x \mapsto e^{3x}$. On note $F = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$. On note \mathcal{B}' la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F .
2. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \psi : F &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ g &\longmapsto \psi(g) = (g(0), g(1), g(2)) \end{aligned}$$

et on note $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\psi)$ la matrice de ψ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

- (a) Expliciter la matrice A .
- (b) Montrer que $\det(A) = e^\alpha (e-1)^\beta (e+1)^\gamma$ où α, β et γ sont trois entiers naturels que l'on déterminera.
- (c) Que peut-on en déduire sur ψ ?

Exercice 3. (9 points)

À un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$, on associe le polynôme noté $\varphi(P)$ et défini par

$$\varphi(P) = (2X - 1)P - \left(X^2 + \frac{1}{2}\right)P'.$$

1. Montrer que $\varphi(P) \in \mathbb{R}_4[X]$.

On considère alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_3[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P &\longmapsto \varphi(P) \end{aligned}$$

2. Montrer que φ est linéaire.
3. On note \mathcal{B} et \mathcal{C} les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}_4[X]$, respectivement. Soit $A = M_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ la matrice de φ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .
 - (a) Expliciter la matrice A en précisant son nombre de lignes et de colonnes.
 - (b) Déterminer le rang de A . En déduire le rang de φ .
 - (c) L'application φ est-elle surjective? Justifier.
 - (d) L'application φ est-elle injective? Justifier.
4. Résoudre l'équation $\varphi(P) = 1$ d'inconnue P .

Exercice 4. (13 points)

Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Autrement dit, $E = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. On rappelle que $GL_3(\mathbb{R})$, muni du produit matriciel, désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.
 - (a) L'ensemble E est-il stable par addition? Justifier.
 - (b) Justifier que $E \subset GL_3(\mathbb{R})$.
 - (c) Montrer que l'ensemble E , muni du produit matriciel, est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$\widehat{M}(x) = M\left(x, \frac{x^2}{2}\right)$$

- (a) Donner la matrice $\widehat{M}(0)$ puis la matrice $\widehat{M}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x + y)$.
- (c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{M}(x)$ est inversible et donner son inverse.
- (d) On note F l'ensemble des matrices de la forme $\widehat{M}(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, autrement dit

$$F = \{\widehat{M}(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Justifier que F est un sous-groupe de E (muni du produit matriciel).

3.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\widehat{M}(x))^n = \widehat{M}(nx)$.
 - (b) Le résultat précédent reste-t-il valable si $n = -1$? si $n \in \mathbb{Z}$? Justifier.