Correction du devoir surveillé n°1 21/10/2016

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

QCM : 1b, 2b, 3b, 4a

Exercice 1

1) $\forall a, b \geq 0 \quad 1+a+b \leq 1+a+b+ab$ car $ab \geq 0$. D'où $1+a+b \leq (1+a)(1+b)$

2) $\delta : E^2 \to \mathbb{R}$; $\delta(x,y) = \ln(1+d(x,y))$. $\delta(x,y) \geq 0$ car $\ln(1+d(x,y)) \geq \ln(1) = 0$.

- $\delta(x,y) = 0 \iff \ln(1+d(x,y)) = 0 \iff 1+d(x,y) = 1 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\delta(y,x) = \ln(1+d(y,x)) = \ln(1+d(x,y)) = \delta(x,y)$
- Soient $(x,y,z) \in E^3$

$\delta(x,z) = \ln(1+d(x,z))$. or $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

d'où $1+d(x,z) \leq 1+d(x,y)+d(y,z) \leq (1+d(x,y))(1+d(y,z))$

d'où $\ln(1+d(x,z)) \leq \ln[(1+d(x,y))(1+d(y,z))]$ car $x \mapsto \ln x$ est $\nearrow$

d'où $\delta(x,z) \leq \ln(1+d(x,y)) + \ln(1+d(y,z))$

c.a.d $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$

Donc δ est une distance sur E.

Exercice 2 : Soit (u_n) une suite convergente dans les e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ vers une limite l, c.a.d. :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N \ \|u_n - l\| < \varepsilon/2$

Montrons que (u_n) est une suite de CAUCHY.

On peut écrire pour $p \geq N$ et $q \geq N$:

$\|u_p - u_q\| = \|(u_p - l) + (l - u_q)\| \leq \|u_p - l\| + \|u_q - l\| < \varepsilon$

c.a.d :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall p, q$ tq $p \geq N, q \geq N$ alors $\|u_p - u_q\| < \varepsilon$ cqfd.

Exercice 3 : Montrons que N est une norme sur E

- Soit $x \in E$. $N(x) = 0 = \max(N_1(x), N_2(x))$ donc $N_1(x) = N_2(x) = 0$ car N_1 et N_2 sont à valeurs positives. D'où $x = 0_E$
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. $N(\lambda x) = \max(N_1(\lambda x), N_2(\lambda x)) = \max(|\lambda| N_1(x), |\lambda| N_2(x))$

c.a.d. : $N(\lambda x) = |\lambda| \max(N_1(x), N_2(x))$ car $|\lambda| \geq 0$

ou encore $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

- Soit $(x,y) \in E^2$ On a : $\begin{cases} N_1(x+y) \leq N_1(x) + N_1(y) \\ N_2(x+y) \leq N_2(x) + N_2(y) \end{cases}$

d'où $\begin{cases} N_1(x+y) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) + \max(N_1(y), N_2(y)) \\ N_2(x+y) \leq \max(N_1(x), N_2(x)) + \max(N_1(y), N_2(y)) \end{cases}$

c.a.d. $\begin{cases} N_1(x+y) \leq N(x) + N(y) \\ N_2(x+y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$ ou encore

$N(x+y) = \max(N_1(x+y), N_2(x+y)) \leq N(x) + N(y)$ cqfd.

Exercice 4

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+2y^2}$

. Soit $x \neq 0$. $f(x,0) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,0) = 0$

. Soit $x \neq 0$ $f(x,x) = \dfrac{1}{3}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,x) = \dfrac{1}{3}$

Les limites étant $\neq$ pour 2 courbes restrictions la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas.

b) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}$.

$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \dfrac{1-\cos r^2}{\sin r^2}$

et $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = \dfrac{2\sin^2 r^2/2}{2\sin r^2/2 \cos r^2/2} = \dfrac{\sin r^2/2}{\cos r^2/2} = \tan r^2/2 \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ \forall\theta}]{} 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1-\sqrt{1-xy}} = \dfrac{xy(1+\sqrt{1-xy})}{1-(1-xy)} = (1+\sqrt{1-xy})$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 1+\sqrt{1-xy} = 2$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\ \ln(6x^4+4y^2)$

on peut supposer $|x|<1$. donc $x^2<1 \Rightarrow x^4<x^2 \Rightarrow 6x^4+4y^2 \leq 6x^2+4y^2$

et puis $6x^4+4y^2 \leq 6(x^2+y^2)$

D'où $|f(x,y)-0| \leq \sqrt{x^2+y^2}\,(\ln 6 + \ln(x^2+y^2))$

ou encore $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| \leq r(\ln 6 + \ln r^2) \xrightarrow[\substack{r\to 0\\ \forall\theta}]{} 0$

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

Exercice 5

1) vu en TD. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sin x$. $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| = |\cos x| \leq 1$

Alors $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $|\sin x_1 - \sin x_2| \leq 1\,|x_1 - x_2|$ d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis. En posant $x_1 = u$, $x_2 = 0$ on a l'inégalité demandée.

3) $f(x,y) = \begin{cases} (\sin x^2 - \sin y^2)\,/\,|x|+|y| \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$

. Si $(x_0,y_0) = (0,0)$. on a $|f(x,y)| = \dfrac{|\sin x^2 - \sin y^2|}{|x|+|y|} \leq \dfrac{|\sin x^2| + |\sin y^2|}{|x|+|y|}$

et d'après 2) on a $|f(x,y)| \leq \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$ d'après 1)

Donc f est continue en $(0,0)$

. Si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ alors f est continue en (x_0,y_0) d'après les théorèmes généraux sur la continuité des fonctions.

Exercice 6 : $f \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $u_n = \left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} , \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \right)$

On a $\|u_n - (0,0)\|_\infty = \max \left(\left| \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - 0 \right| , \left| \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi} - 0 \right| \right)$

$= \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$f(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 - (-1) = 2$

2) On a exhibé une suite (u_n) tq $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \\ f(u_n) \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f(0,0) \end{cases}$

Donc f est discontinue en $(0,0)$. cqfd.

Fin.