

Année universitaire 2019-2020

**Exercice 1 [3 points] Réponse exacte/fausse ( $\pm 0.5pt$ ), Pas de réponse (0pt).**

Soit  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé ;  $A = ]7; +\infty[$  et  $B = ]7; 9[$ .

- Dans  $\mathbb{R}$ ,  $A$  est une partie **Fermée** (car  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A) = ]-\infty; 7[$  est ouvert) et **pas ouverte** (car il n'existe pas de boule ouverte centrée en 7 incluse dans  $A$ ).
- $\overset{\circ}{A}$  est égal à  **$]7; +\infty[$**  (car  $]7; +\infty[$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$ )
- $\bar{A}$  est égal à  **$A$**  (car  $A$  est fermée, donc  $\bar{A} = A$ )
- $\partial A$  est égal à  **$\{7\}$**  (car  $\partial A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ )
- Dans  $\mathbb{R}$ ,  $B$  est une partie **pas ouverte** (car il n'existe pas de boule ouverte centrée en 7 incluse dans  $B$ ), **pas fermée** (car  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(B) = ]-\infty; 7[ \cup ]9; +\infty[$  n'est pas ouvert en 9).
- Dans  $A$ ,  $B$  est une partie **Ouverte** (car  $B = A \cap ]6; 9[$  où  $]6; 9[$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}$ ), **pas fermée** (car  $\mathcal{C}_A(B) = ]9; +\infty[$  non ouvert)

**Exercice 2 [4 points] On considère l'application**

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x + y| + |x| \end{aligned}$$

- Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^2$ .

- (i) Positive homogénéité de  $N : \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(\lambda(x, y)) = |\lambda|N(x, y)$   
Soit  $\lambda \in \mathbb{K}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{aligned} N(\lambda(x, y)) &= N(\lambda x, \lambda y) && \# \text{ car } \mathbb{R}^2 \text{ } \mathbb{R} - \text{ev} \\ &= |\lambda x + \lambda y| + |\lambda x| && \# \text{ par définition de } N \\ &= |\lambda(x + y)| + |\lambda| |x| && \# \text{ car } |\cdot| \text{ norme sur } \mathbb{R}, \text{ et } \mathbb{R} \text{ } \mathbb{R} - \text{ev} \\ &= |\lambda| |x + y| + |\lambda| |x| && \# \text{ car } |\cdot| \text{ norme sur } \mathbb{R} \\ &= |\lambda| (|x + y| + |x|) && \# \text{ car } |\cdot| \text{ norme sur } \mathbb{R}, \text{ et } \mathbb{R} \text{ } \mathbb{R} - \text{ev} \\ &= \lambda N(x, y) && \# \text{ par définition de } N \end{aligned}$$

- (ii) Non-dégénérescence :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : N(x, y) = 0 \implies (x, y) = (0, 0)$   
Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Supposons  $N(x, y) = 0$ , montrons que  $(x, y) = (0, 0)$ .

$$\begin{aligned} N(x, y) = 0 &\Leftrightarrow |x + y| + |x| = 0 && \# \text{ par définition de } N \\ &\Leftrightarrow |x + y| = -|x| && \# \\ &\Leftrightarrow |x + y| = 0 \text{ et } |x| = 0 && \# \text{ car } |\cdot| \text{ est positive ou nulle} \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ et } x = 0 && \# \text{ car } |\cdot| \text{ norme sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

- (iii) Inégalité triangulaire :  $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2 : N((x, y) + (x', y')) \leq N(x, y) + N(x', y')$   
Soit  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$\begin{aligned} N((x, y) + (x', y')) &= N(x + x', y + y') && \# \text{ car } \mathbb{R}^2 \text{ } \mathbb{R} - \text{ev} \\ &= |(x + x') + (y + y')| + |x + x'| && \# \text{ par définition de } N \\ &\leq |x + y| + |x' + y'| + |x| + |x'| && \# \text{ car } |\cdot| \text{ norme sur } \mathbb{R} \\ &\leq N(x, y) + N(x', y') && \# \text{ par définition de } N \end{aligned}$$

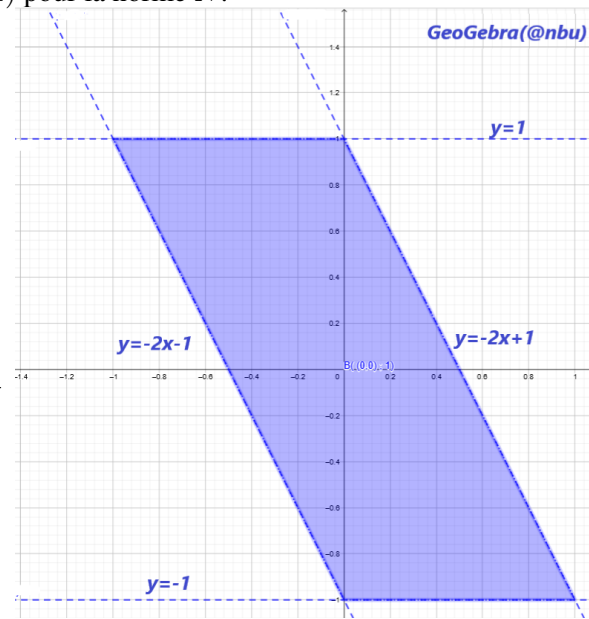
2. Représenter graphiquement la boule unité centrée à l'origine  $B(0_{\mathbb{R}^2}; 1)$  pour la norme  $N$ .

Par définition :

$$\begin{aligned} B(0_{\mathbb{R}^2}; 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; N((x, y) - (0, 0)) < 1\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; N(x, y) < 1\} \end{aligned}$$

On cherche donc  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $N(x, y) < 1 \iff |x + y| + |x| < 1$ .

Étudions les différentes possibilités :



$ x + y $	$ x $	$ x + y  +  x  < 1$	Demi-plan considéré
$x + y \geq 0$	$x \geq 0$	$x + y + x = 2x + y < 1$	$y < -2x + 1$
$x + y \geq 0$	$x \leq 0$	$x + y - x = y < 1$	$y < 1$
$x + y \leq 0$	$x \geq 0$	$-x - y + x = -y < 1$	$y > -1$
$x + y \leq 0$	$x \leq 0$	$-x - y - x = -2x - y < 1$	$y > -2x - 1$

### Exercice 3 [2 points]

On considère l'application

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \end{aligned}$$

Montrer que  $\delta$  est une distance sur  $\mathbb{R}^*$ .

(i) Symétrie :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \delta(y, x) = \delta(x, y)$

Soit  $x, y \in \mathbb{R}^*$ . Comme  $|\cdot|$  est une distance sur  $\mathbb{R}^*$ , on a :

$$\delta(y, x) = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| - \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| = |-1| \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \delta(x, y)$$

(ii) Séparation :  $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : \delta(x, y) = 0 \iff x = y$ .

Soit  $x, y \in \mathbb{R}^*$ . Supposons  $\delta(x, y) = 0$ . Montrons que  $x = y$ . On a par équivalences successives :

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \iff \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \iff x = y$$

(iii) Inégalité triangulaire :  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^* : \delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$ .

Soit  $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ . Comme  $|\cdot|$  est une distance sur  $\mathbb{R}^*$ , on a

$$\delta(x, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$$

### Exercice 4 [5 points] Considérons

- $A$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}$
- $B$  l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$ , vu comme sous-ensemble de  $\mathbb{R}$
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$  où  $(\mathbb{R}^2; \|\cdot\|_2)$  est un espace vectoriel normé.

Pour les ensembles  $A, B$  et  $C$  :

1. Justifier soigneusement s'il est ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé :

- $A$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}$  : il s'agit d'une union finie de singletons.

$A$  est fermé car une union finie de singletons (fermés) est un fermé.

$A$  n'est pas ouvert car les seuls ouverts et fermés de  $\mathbb{R}$  sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$ .

- $B = \mathbb{N}$ , vu comme sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  : il s'agit d'une union infinie de singletons. Nous ne pouvons rien dire sur une union infinie de fermés. Cependant :

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\} \iff \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(B) = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ]n; n+1[ \right) \cup ]-\infty; 0[$$

$B$  est fermé car son complémentaire est ouvert (union infinie d'ouverts de  $\mathbb{R}$ ).

$B$  n'est pas ouvert car les seuls ouverts et fermés de  $\mathbb{R}$  sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}$ .

- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$  où  $(\mathbb{R}^2; \|\cdot\|_2)$  est un espace vectoriel normé.

$C$  est ouvert : Montrons  $\forall (x, y) \in C, \exists r > 0 : B((x, y); r) \subset C$ .

Soit  $(x, y) \in C$  ie  $y > 2$ . Prenons  $r = \frac{y-2}{2} > 0$ , montrons que  $B((x, y); r) \subset C$ .

Par définition de la boule ouverte :

$$B((x, y); r) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : d((a, b); (x, y)) < r\} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \|(a, b) - (x, y)\|_2 < r\}$$

Soit  $(a, b) \in B((x, y); r)$  ie  $\|(a-x; b-y)\|_2 < r$ . Montrons que  $(a, b) \in C$  ie  $b > 2$ .

On a

$$\begin{aligned} (a, b) \in B((x, y); r) &\iff \|(a-x; b-y)\|_2 < r && \# \text{ par def} \\ &\iff \sqrt{|a-x|^2 + |b-y|^2} < r && \# \text{ par def de } \|\cdot\|_2 \\ &\Rightarrow |a-x|^2 + |b-y|^2 < r^2 && \# \text{ élévation au carré} \\ &\Rightarrow |b-y|^2 < r^2 && \# \text{ car } |a-x|^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow -r < b-y < r && \# \text{ encadrement de } |\cdot| \end{aligned}$$

Plus précisément

$$\begin{aligned} -r < b-y &\iff -\frac{y-2}{2} < b-y && \# \text{ par def de } r \\ &\iff -y+2 < 2b-2y && \# \text{ multiplication par 2} \\ &\iff 2 < 2b-y && \# -y \text{ de part et d'autre} \\ &\iff \frac{2+y}{2} < b && \# \text{ simplification} \end{aligned}$$

Or  $2 < y$  donc  $(2+2)/2 < \frac{2+y}{2}$  : donc  $2 < b$ . Ainsi  $(a, b) \in C$ .

Finalement  $B((x, y); (y-2)/2)$  est incluse dans  $C$ .

$C$  n'est pas fermé car les seuls ouverts et fermés de  $\mathbb{R}^2$  sont  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^2$ .

- Donner (sans justification) son intérieur, son adhérence et sa frontière.

- $A$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}$

—  $\overset{\circ}{A} = \emptyset$  car il n'y a pas d'ouvert (non vide) inclus dans cette union de fermés

—  $\overline{A} = A$  car  $A$  fermé et l'adhérence d'une union est l'union des adhérences

—  $\partial A = A$  car  $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

- $B = \mathbb{N}$ , vu comme sous-ensemble de  $\mathbb{R}$

—  $\overset{\circ}{B} = \emptyset$  car il n'y a pas d'ouvert (non vide) inclus dans cette union de fermés

—  $\overline{B} = B$  car  $B$  fermé et l'adhérence d'une union est l'union des adhérences

—  $\partial B = B$  car  $\partial B = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}$

- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$  où  $(\mathbb{R}^2; \|\cdot\|_2)$  est un espace vectoriel normé.

—  $\overset{\circ}{C} = C$  car  $C$  est ouvert

—  $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 2\}$

—  $\partial C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2\}$

### Exercice 5 [3 points]

Considérons le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  et  $d$  la distance associée à la norme  $|\cdot|$ .

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 : (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies d(u_p; u_q) < \varepsilon$$

1. Donner la définition d'une suite convergente vers  $l$  dans  $\mathbb{R}$ .

On travaille dans l'evn  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$  un evn et  $d$  la distance associée à  $|\cdot|$ .

On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  converge vers  $l$  dans  $E$  si et seulement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(u_n, l) \leq \varepsilon$$

2. Montrer que toute suite dans  $\mathbb{R}$  convergente est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente, de limite  $l$  ie pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ , on a

$$d(u_n, l) < \varepsilon/2 \iff |u_n - l| < \varepsilon/2.$$

Montrons que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy, ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 : (p \geq N' \text{ et } q \geq N') \implies d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente de limite  $l$ , alors pour tout  $p, q \geq N$ , on obtient

$$|u_p - u_q| = |(u_p - l) + (l - u_q)| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \varepsilon$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

### Exercice 6 [5 points]

Considérons les applications suivantes :

$$f(x, y) = \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x \ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}, \quad h(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{\sqrt{x}}.$$

Pour chacune de ces applications :

1. Trouver le domaine de définition  $\mathcal{D}$ ,

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}, \quad \mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > -1; y \neq 0\}, \quad \mathcal{D}_h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y \geq x^2\}$$

2. Représenter graphiquement  $\mathcal{D}$ ,

3. Justifier si  $\mathcal{D}$  est ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre,

—  $\mathcal{D}_f$  est ouvert (car  $\mathbb{C}_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{D}_f) = \{(1, 0)\}$  est fermé) et non fermé (car  $\mathcal{D}_f \neq \emptyset$  ou  $\mathcal{D}_f \neq \mathbb{R}^2$ )

—  $\mathcal{D}_g$  est ouvert (union de deux demi-plans ouvert) et non fermé (car  $\mathcal{D}_g \neq \emptyset$  ou  $\mathcal{D}_g \neq \mathbb{R}^2$ )

—  $\mathcal{D}_h$  non ouvert et non fermé

4. Déterminer (sans justifier) l'intérieur et l'adhérence de  $\mathcal{D}$ .

Domaine	Intérieur	Adhérence	Frontière
$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}^2$	$\{(1, 0)\}$
$\mathcal{D}_g$	$\mathcal{D}_g$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -1; y = 0\}$
$\mathcal{D}_h$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y > x^2\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0; y \geq x^2\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0; y = x^2\}$

*Fin.*