

Année universitaire 2019-2020

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif.*
Ce DS est composé d'un vrai-faux et cinq exercices indépendants (dont un avec une question bonus).

Exercice 1 [3 points] RÉPONSES DIRECTEMENT SUR LA COPIE

Réponse exacte/fausse ($\pm 0.5pt$), Pas de réponse (0pt). Aucune justification demandée.

Soit $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé ; $A = [7; +\infty[$ et $B = [7; 9[$.

1. Dans \mathbb{R} , A est une partie

<input type="checkbox"/> Ouverte, pas fermée	<input type="checkbox"/> Ouverte et Fermée
<input type="checkbox"/> Fermée, pas ouverte	<input type="checkbox"/> Ni ouverte, ni fermée

2. $\overset{\circ}{A}$ est égal à

<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> $]7; +\infty[$	<input type="checkbox"/> \emptyset	<input type="checkbox"/> $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A)$
------------------------------	---	--------------------------------------	--

3. \overline{A} est égal à

<input type="checkbox"/> $] - \infty; 7[$	<input type="checkbox"/> A	<input type="checkbox"/> $] - \infty; 7]$	<input type="checkbox"/> $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(A)$
---	------------------------------	---	--

4. ∂A est égal à

<input type="checkbox"/> $\{7\}$	<input type="checkbox"/> $] - \infty; 7[$	<input type="checkbox"/> \emptyset	<input type="checkbox"/> $] - \infty; 7]$
----------------------------------	---	--------------------------------------	---

5. Dans \mathbb{R} , B est une partie

<input type="checkbox"/> Ouverte, pas fermée	<input type="checkbox"/> Ouverte et Fermée
<input type="checkbox"/> Fermée, pas ouverte	<input type="checkbox"/> Ni ouverte, ni fermée

6. Dans A , B est une partie

<input type="checkbox"/> Ouverte, pas fermée	<input type="checkbox"/> Ouverte et Fermée
<input type="checkbox"/> Fermée, pas ouverte	<input type="checkbox"/> Ni ouverte, ni fermée

Exercice 2 [4 points] On considère l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto |x + y| + |x|$$

1. Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 .
2. Représenter graphiquement la boule unité centrée à l'origine $B(0_{\mathbb{R}^2}; 1)$ pour la norme N .

Tournez svp \rightarrow

Exercice 3 [2 points]

On considère l'application

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| \end{aligned}$$

Montrer que δ est une distance sur \mathbb{R}^* .

Exercice 4 [5 points] Considérons

- A un ensemble fini de points de \mathbb{R}
- B l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , vu comme sous-ensemble de \mathbb{R}
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2\}$ où $(\mathbb{R}^2; \|\cdot\|_2)$ est un espace vectoriel normé.

Pour les ensembles A, B et C :

1. Justifier soigneusement s'il est ouvert, fermé, ni ouvert, ni fermé,
2. Donner (sans justification) son intérieur, son adhérence et sa frontière.

Exercice 5 [3 points]

Considérons le \mathbb{R} -espace vectoriel normé $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et d la distance associée à la norme $|\cdot|$.

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 : (p \geq N \text{ et } q \geq N) \implies d(u_p; u_q) < \varepsilon$$

1. Donner la définition d'une suite convergente vers l dans \mathbb{R} .
2. Montrer que toute suite dans \mathbb{R} convergente est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .

Exercice 6 [3 points + Bonus]

Considérons les applications suivantes :

$$f(x, y) = \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x \ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}, \quad h(x, y) = \frac{\sqrt{y-x^2}}{\sqrt{x}}.$$

Pour chacune de ces applications :

1. Trouver le domaine de définition \mathcal{D} ,
2. Représenter graphiquement \mathcal{D} ,
3. Préciser (sans justifier) si \mathcal{D} est ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre,
4. Déterminer (sans justifier) l'intérieur et l'adhérence de \mathcal{D} .
5. [Bonus +2pts] Justifier soigneusement la question 3.

Fin.