EISTI
Ecole Internationale des Sciences du Traitement de l'Information

Année universitaire 2019-2020

DS2 CORRECTION
Filière : **PREPA 2 - PAU**
Matière : **Analyse de** $\mathbb{R}^n$
Date : **29/11/2019**
Responsables : **Halanay Elena ; Barrau Nelly**

Exercice 1 *[Bonus + 3pts]* Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y \leq 4 - x^2\}$$

1. Représenter graphiquement A.
2. L'ensemble A est-il un compact de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 *[8 points]* Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & sinon \end{cases} \end{array}$$

— *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, calculer le gradient de f.
   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$:

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = {}^tJ_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$$

   où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right)$$

2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, les dérivées partielles de f existent et sont continues (comme composition et quotients d'applications continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas). Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.
3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$?
   Comme f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on en conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

— *Étude de la fonction en* $(0, 0)$

4. Calculer $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.
   [Indication] $ln(1 + r^2) = r^2 - \dfrac{r^4}{2} + o(r^4)$ *au voisinage de* 0.
   Par passage en coordonnées polaires $x = rcos(\theta)$ et $y = rsin(\theta)$ et en utilisant le DL indiqué, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \lim_{r\to 0} \frac{ln(1+r^2)}{r^2} = 1, \quad (\forall\theta \in \mathbb{R})$$

5. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.
   f est continue en $(0,0)$ si et seulement si
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = \alpha.$$
   Ainsi, d'après la question 4., f est continue en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = 1$.
6. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha = 1$.
   En utilisant la définition de dérivées partielles au point $(0,0)$, f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ si et seulement si les limites suivantes sont finies :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}$$
   Il vient
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{ln(1+h^2)}{h^2} - \alpha\right) && \sharp\text{par def. de } f \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2-\frac{h^4}{2}}{h^2} - \alpha\right) && \sharp\text{en utilisant le DL de 4.} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(1-\frac{h^2}{2} - \alpha\right) && \sharp\text{par simplification} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-\alpha}{h} - \frac{h}{2} && \sharp\text{par simplification}
\end{aligned}$$
   Ainsi
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} < \infty \Longleftrightarrow \alpha = 1$$
   Par symétrie de x et de y dans $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, le résultat est analogue.
7. Donner l'hypothèse pour laquelle $\overrightarrow{grad} f(0,0)$ existe. Calculer $\overrightarrow{grad} f(0,0)$.
   $\overrightarrow{grad} f(0,0)$ existe si et seulement si les dérivées partielles premières de f en $(0,0)$ existent. D'après 6., c'est le cas si et seulement si $\alpha = 1$.
   Sous cette hypothèse et en finalisant les résultats obtenus en 6., il vient
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$
   Ainsi
$$\overrightarrow{grad} f(0,0) = {}^tJ_f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
8. Supposons que $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
   [Indication] On pourra utiliser l'indication de la question 4.
   Pour que f soit de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, il faut et il suffit que f admet des dérivées partielles premières continues sur $\mathbb{R}^2$.
   — D'après 2., on sait déjà que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
   — Par hypothèse $\alpha = 1$: f est continue en $(0,0)$ (d'après 5.) et admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ (d'après 6.)
   — Montrons que les dérivées partielles premières de f sont continues en $(0,0)$ ie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x}{x^2+y^2}\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) && \sharp \text{ d'après 1.}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{2rcos(\theta)}{r^2}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{ln(1+r^2)}{r^2}\right) && \sharp \text{ coord. polaires}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{2cos(\theta)}{r}\left(\frac{1}{1+r^2} - 1 + \frac{r^2}{2}\right) && \sharp \text{ d'après DL du 4.}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r(r^2-1)}{r^2+1}cos(\theta) && \sharp \text{ par simplification}\\
&= \lim_{r\to 0} -rcos(\theta) && \sharp \text{ par simplification}\\
&= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) && \sharp \text{ cos borné}
\end{aligned}$$

De manière analogue (de par la symétrie de x et de y dans l'expression des dérivées partielles, et sin est bornée), on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$.

Finalement, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(b) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f en $(0,0)$?

D'après (a), f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc f est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$. En particuliers, f est différentiable en $(0,0)$

(c) Retrouver le résultat de (b) en utilisant la définition de la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Montrons que pour $h = (h_1, h_2)$:

$$\lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^2}} \varepsilon(h) = 0 \qquad o \quad \varepsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\left(f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

Dans $\mathbb{R}^2$, toutes les normes étant équivalentes (car espace de dimension finie), prenons $\|h\| = \|h\|_2 = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$. Il vient alors

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{ln(1+h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2} - 1\right)$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h) &= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\left(\frac{ln(1+h_1^2+h_2^2)}{h_1^2+h_2^2} - 1\right) && \sharp\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\left(\frac{ln(1+r^2)}{r^2} - 1\right) && \sharp \text{ coord. polaire}\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{-r}{2} && \sharp \text{ d'après DL de 4.}\\
&= 0 && \sharp \text{ d'après DL de 4.}
\end{aligned}$$

Exercice 3 *[6 points]* Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y) &\longmapsto \begin{cases} \dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (1,0)\\ 0 & sinon \end{cases}
\end{aligned}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
   Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2\frac{(x-1)^2 - y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2(x-1)^3 y}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues (comme composition et quotients d'applications continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas) : donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(1,0)\}$.
3. Montrer que f est continue en $(1,0)$.
   f est continue en $(1,0)$ si et seulement si
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0) = 0$$
   Après étude des limites partielles ($f(.,0)$; $f(1,.)$; $f(x-1,x)$...), 0 semble être la limite. Démontrons le :
$$\begin{array}{rcll} |f(x,y) - f(1,0)| & = & |f(x,y)| & \sharp \\ & = & \left|\dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}\right| & \sharp \text{ par definition} \\ & \leq & |x-1| & \sharp \text{ car } y^2 \leq y^2 + (x-1)^2 \\ & \longrightarrow & 0 & \sharp \end{array}$$
   Donc$f$ est continue en $(1,0)$.
4. Supposons que f n'est pas différentiable en $(1,0)$. f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
   On sait que si $f \in \mathbb{R}^{\nvDash}$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
   Par contraposée, si f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (car f non différentiable en $(1,0)$, alors f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 *[6 points]* Considérons les applications $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et g définies par
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = f(x,\varphi(x)). \end{array}$$

1. Supposons f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   Exprimer g' en fonction de φ' et des dérivées partielles de f.
   Comme $g(x) = f(u(x);v(x))$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \varphi(x)$, il vient
$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x,\varphi(x))\frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(x,\varphi(x))\frac{\partial v}{\partial x}(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial v}(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$
2. On pose $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-2x^2}$ et $\varphi(x) = 3x^2$.
   (a) Déterminer $\mathcal{D}$ le domaine de définition de f. Justifier que $\mathcal{D}$ est ouvert.
   f n'a de sens que si son dénominateur ne s'annule jamais, ie $y \neq 2x^2$. Ainsi
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 2x^2\}.$$
   De plus, en considérant l'application
$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y - x^2 \end{array}$$
   continue sur $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{D} = g_{-1}(]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ est donc l'image réciproque d'une union finie d'ouverts. $\mathcal{D}$ est donc lui-même ouvert.
   Remarque. $\mathcal{D}$ est l'union finie de deux ouverts de $\mathbb{R}^2$
$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 2x^2\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 2x^2\}.$$

(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ et ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Sur $\mathcal{D}$, f est de classe C^1 en tant que composée et fraction d'applications de classe C^1 (dont le dénominateur ne s'annule jamais).
ϕ est un polynôme à coefficients réels de degré 3 : ϕ est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(c) Vérifier que $g(x) = 1$.
Par définition de g et par composition :

$$g(x) = f(x, \varphi(x)) = \frac{x^2}{\varphi(x) - 2x^2} = \frac{x^2}{3x^2 - 2x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

(d) Déterminer $\overrightarrow{v}$ un vecteur tangent à la courbe représentative de φ en $x_0 \in \mathbb{R}$.
Un vecteur tangent à φ en $x_0 \in \mathbb{R}$ est $(1; \varphi'(x_0))$

(e) Montrer que $\langle \overrightarrow{grad} f(x_0, \varphi(x_0)); \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

$$\langle \overrightarrow{grad} f(x_0, \varphi(x_0)); \overrightarrow{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, \varphi(x_0)) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, \varphi(x_0))\varphi'(x_0) = g'(x_0)$$

Or, d'après (c), $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, notamment $g'(x_0) = 0$.
Ainsi

$$\langle \overrightarrow{grad} f(x_0, \varphi(x_0)); \overrightarrow{v} \rangle = g'(x_0) = 0.$$

(f) Que pouvez-vous conclure ?
D'après (e), le produit scalaire entre $\overrightarrow{grad} f(x_0, \varphi(x_0)$ et $\overrightarrow{v}$ est nul : ces deux vecteurs sont donc orthogonaux l'un à l'autre.

Fin.