

Année universitaire 2019-2020

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
 - *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
 - *Le barème est signalé à titre indicatif.*
- Ce DS est composé d'un exercice bonus et de trois exercices indépendants.*

Exercice 1 [Bonus + 3pts] Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y \leq 4 - x^2\}$$

1. Représenter graphiquement A .
2. L'ensemble A est-il un compact de \mathbb{R}^2 ?

Exercice 2 [8 points] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{sinon} \end{cases}$$

- *Étude de la fonction sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*
 1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, calculer le gradient de f .
 2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
 3. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?
- *Étude de la fonction en $(0, 0)$*
 4. Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
[Indication] $\ln(1 + r^2) = r^2 - \frac{r^4}{2} + o(r^4)$ au voisinage de 0.
 5. Étudier la continuité de f en $(0, 0)$.
 6. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha = 1$.
 7. Donner l'hypothèse pour laquelle $\overrightarrow{\text{grad}} f(0, 0)$ existe. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}} f(0, 0)$.
 8. Supposons que $\alpha = 1$.
 - (a) Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
[Indication] On pourra utiliser l'indication de la question 4.
 - (b) Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f en $(0, 0)$?
 - (c) Retrouver le résultat de (b) en utilisant la définition de la différentiabilité de f en $(0, 0)$.

Tournez svp \rightarrow

Exercice 3 [6 points] Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$.
3. Montrer que f est continue en $(1, 0)$.
4. Supposons que f n'est pas différentiable en $(1, 0)$. f est-elle C^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 4 [6 points] Considérons les applications $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g définies par

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto g(x) = f(x, \varphi(x)).$$

1. Supposons f de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et φ de classe C^1 sur \mathbb{R} .
Exprimer g' en fonction de φ' et des dérivées partielles de f .
2. On pose $f(x, y) = \frac{x^2}{y - 2x^2}$ et $\varphi(x) = 3x^2$.
 - (a) Déterminer \mathcal{D} le domaine de définition de f . Justifier que \mathcal{D} est ouvert.
 - (b) Justifier que f est de classe C^1 sur \mathcal{D} et ϕ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
 - (c) Vérifier que $g(x) = 1$.
 - (d) Déterminer \vec{v} un vecteur tangent à la courbe représentative de φ en $x_0 \in \mathbb{R}$.
 - (e) Montrer que $\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, \varphi(x_0)); \vec{v} \rangle = 0$.
 - (f) Que pouvez-vous conclure ?

Fin.