

**Exercice 1** [5 points] Soit  $f$  l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

- Déterminer le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$ .
- Vérifier que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existent.
- En déduire que  $f$  n'est pas de classe  $C^2$ .

**Exercice 2** [10 points] Soit l'application  $f$  définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .  
 $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais.  
 Étudions la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$  :

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(0, 0)| &= \left| \frac{xy^3}{x^2+y^2} \right| && \# \text{ par def de } f \\ &= \frac{|xy|y^2}{x^2+y^2} && \# \text{ par ppte de } | \cdot | \\ &\leq \frac{|xy|(y^2+x^2)}{x^2+y^2} && \# \text{ car } y^2 \leq y^2+x^2 \\ &\leq |xy| && \# \text{ par simplification} \\ &\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 && \# \text{ par passage à la limite} \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est continue en  $(0, 0)$  donc  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Déterminer les dérivées partielles premières de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xy^2(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Déterminer la matrice jacobienne de  $f$  en  $(0, 0)$ .

$$J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

Finalemment  $J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier votre réponse.

$f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si ses dérivées partielles premières sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

Sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues (comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule jamais).

Étudions la continuité de ces dérivées en  $(0, 0)$ , par passage en coordonnées polaires : posons  $x = r \cos(\theta)$  et  $y = r \sin(\theta)$ . Alors

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) && \# \text{ par chmt de var} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 \sin^3(\theta) ((\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta)))}{r^4} && \# \text{ par def de f} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \sin^3(\theta) ((\sin^2(\theta) - \cos^2(\theta))) && \# \text{ par simplification} \\ &= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \end{aligned}$$

Donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, 0)$ . On montre de manière analogue que  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est également continue en  $(0, 0)$ .

Finalement, les dérivées partielles premières de  $f$  sont continues en  $(0, 0)$  :  $f$  est donc  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

5.  $f$  est-elle différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier votre réponse.

Comme  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  (question précédente),  $f$  est donc différentiable sur  $\mathbb{R}^2$ .

6. Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{-2xy^3(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^3y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{y^2(y^4 - 3x^4 + 6x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

7. Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$  en  $(0, 0)$ . En déduire la matrice hessienne de  $f$  en  $(0, 0)$ .

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = 1$$

Donc les 4 dérivées partielles secondes existent en  $(0, 0)$ . Ainsi

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.  $f$  est-elle de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier votre réponse.

On constate que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0 \neq 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

D'après la contraposée du théorème de Schwarz,  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  en  $(0, 0)$ . Donc  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3** [10 points] Soit  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$ . On cherche  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  de classe  $C^2$ , solution de l'équation

$$(E) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 4x^3y^3$$

1. Justifier que  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

On a  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$  ie

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

Posons

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x & (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

$g$  et  $h$  sont deux applications continues de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\Gamma_1 = g^{-1}(]0, +\infty[)$  et  $\Gamma_2 = h^{-1}(]-\infty, 0[)$  où  $]0, +\infty[$  et  $]-\infty, 0[$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}$ .

Or l'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert, ainsi  $\Gamma_1, \Gamma_2$  sont des ouverts.

Enfin, l'union finie d'ouverts est ouvert :  $U$  est donc ouvert.

2. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = \left(xy; \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Montrer que  $\varphi$  est un  $C^2$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V = \varphi(U)$  (on explicitera  $V$  et  $\varphi^{-1}$ ).

— Notons tout d'abord que

$$\forall (x, y) \in U : \varphi(x, y) = (u, v) = \left(xy; \frac{y}{x}\right) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^* = V$$

—  $\varphi$  est de classe  $C^2$  de  $U$  (composées de fonctions polynomiales et de fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule jamais sur  $U$ ).

— Soit  $(u, v) \in V$ . Cherchons  $(x, y) \in U$  tel que  $\varphi(x, y) = (u, v)$ . Il vient

$$\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = y^2 > 0 \\ \frac{u}{v} = x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{uv} \in \mathbb{R}_-^* \\ x = \sqrt{\frac{u}{v}} \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Donc  $\varphi$  est bijective de  $U$  sur  $V$ , et admet une bijection réciproque

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : V &\longrightarrow U \\ (u, v) &\longmapsto \left(\sqrt{\frac{u}{v}}; -\sqrt{uv}\right) \end{aligned}$$

—  $\varphi^{-1}$  est de classe  $C^2$  sur  $V$  (composée d'applications de classe  $C^2$ )

Enfin  $\varphi$  est un  $C^2$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V = (\mathbb{R}_-^*)^2$

3. Soit  $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$  de classe  $C^2$  et  $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  telle que  $f = g \circ \varphi$ .

(a) Justifier que  $g$  est de classe  $C^2$ .

Comme  $\varphi$  est bijective, on a

$$f = g \circ \varphi \iff g = f \circ \varphi^{-1}$$

ie  $g$  est la composée d'applications de classe  $C^2$  : donc  $g$  est de classe  $C^2$

(b) Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ , en fonction de  $g, x$  et  $y$ .

On a tout d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{-y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi les dérivées partielles premières de  $f$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases}$$

Les dérivées partielles secondes sont alors

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( y \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v} + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{y^2}{x^3} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} + xy \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \end{cases}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

$f$  est solution de (E) pour tout  $(x, y) \in U$  si et seulement si pour tout  $(u, v) \in V$  :

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4x^3 y^3 \\ \Leftrightarrow 4x^2 y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 4x^3 y^3 \\ \Leftrightarrow 4u^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= 4u^3 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} &= u \end{aligned}$$

Par double primitivation, on obtient

$$g(u, v) = \frac{1}{6}u^3 + uA(v) + B(v)$$

où  $A, B$  sont des applications continues sur  $\mathbb{R}_+$  de classe  $C^2$ . Finalement, les solutions de l'équation (E) sont données par

$$f(x, y) = \frac{1}{6}x^3 y^3 + xyA\left(\frac{y}{x}\right) + B\left(\frac{y}{x}\right).$$

**Exercice 4** [10 points] Soit  $D = [0; \frac{\pi}{2}]^2$ . Considérons

$$\begin{array}{ll} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} & f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{1}{2} \sin(2t) & (x, y) & \longmapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x+y) \end{array}$$

1. Justifier que  $D$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

Montrons que  $D$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  :

—  $D$  est fermé car  $D$  est l'intersection finie de 2 ensembles fermés

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\} \quad A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

On peut aussi travailler avec l'image réciproque de  $g(x) = x$ .

—  $D$  est borné car  $x$  et  $y$  le sont (donc la norme  $\|\cdot\|_\infty$  aussi)

2. Donner sans justifier  $\overset{\circ}{D}$ ,  $\overline{D}$  et  $\partial D$ .

$$\overset{\circ}{D} = ]0; \frac{\pi}{2}[^2 \quad \overline{D} = D \quad \partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

avec

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\} \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{\pi}{2}; 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; y = 0\} \quad \Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}; y = \frac{\pi}{2}\}$$

3. Déterminer les extrema globaux de  $\varphi$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

Étudions tout d'abord les extrema de  $\varphi$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . On a

$$\varphi'(t) = \cos(2t) = 0 \text{ sur } ]0, \frac{\pi}{2}[ \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

De plus,  $\varphi''(t) = -2\sin(2t)$  et donc  $\varphi''(\frac{\pi}{4}) = -2 < 0$ . Ainsi,  $\varphi$  admet en  $\frac{\pi}{4}$  un maximum local. De plus,  $\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0$ . Or toute fonction continue sur un fermé borné atteint ses bornes. Par conséquent,  $\varphi$  atteint sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  son maximum en  $\frac{\pi}{4}$  et ce maximum vaut  $\frac{1}{2}$ , et son minimum en 0 et  $\frac{\pi}{2}$  et ce minimum vaut 0.

4. Montrer que  $f$  admet  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  comme unique point critique sur  $\overset{\circ}{D}$ .

[Indication] On pourra utiliser les formules d'addition de  $\sin(a+b)$ .

Pour déterminer les points critiques de  $f$  sur  $]0, \frac{\pi}{2}[^2$ , résolvons le système suivant sur  $]0, \frac{\pi}{2}[^2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(y)(\cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y)) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x)(\cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y)) = 0 \end{cases}$$

Comme sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction sinus ne s'annule pas, ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y) = \sin(2x+y) = 0 \\ \cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y) = \sin(2y+x) = 0 \end{cases}$$

Comme,  $x, y \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a  $2x+y, 2y+x \in ]0, \frac{3\pi}{2}[$ . Or sur  $]0, \frac{3\pi}{2}[$ , la seule valeur annulant le sinus est la valeur  $\pi$ . Par conséquent, le système ci-dessus est équivalent à

$$\begin{cases} 2x+y = \pi \\ 2y+x = \pi \end{cases}$$

Ce système admet  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  pour seule solution.

5. Étudier les extrema locaux de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ .

Déterminons maintenant la matrice Hessienne de  $f$ . On a pour tout  $(x, y) \in ]0, \frac{\pi}{2}[^2$ ,

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x+y)\sin(y) & \sin(2x+2y) \\ \sin(2x+2y) & 2\cos(2y+x)\sin(x) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

On a de plus,

$$\det H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{4} > 0$$

et

$$\text{Tr}(H_f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)) < 0$$

donc  $f$  admet un maximum local en  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  et ce maximum local vaut  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

6. En utilisant les questions précédentes, étudier les extrema globaux de  $f$  sur  $D$ .

Pour finir l'étude sur le carré fermé  $[0, \frac{\pi}{2}]^2$ , il nous reste à étudier  $f$  sur les bord du carré, c'est-à-dire sur les quatre droites d'équation respectives,  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x=\frac{\pi}{2}$  et  $y=\frac{\pi}{2}$ . De manière évidente sur les droites  $x=0$  et  $y=0$ , la fonction  $f$  s'annule. De plus, sur les droites  $x=\frac{\pi}{2}$  et  $y=\frac{\pi}{2}$ , la fonction  $f$  a des expressions symétriques. On peut donc se contenter d'étudier  $f$  sur la droite d'équation  $y=\frac{\pi}{2}$ . Sur cette droite, on a

$$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) = \varphi(x).$$

On a vu à la première question que sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\varphi$  atteint son maximum en  $\frac{\pi}{4}$  et ce maximum vaut  $\frac{1}{2}$  et son minimum en  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$  et ce minimum vaut  $0$ . Or  $\frac{3\sqrt{3}}{8} > \frac{1}{2}$ , donc on en conclut que :

$f$  atteint son minimum sur le carré fermé  $[0, \frac{\pi}{2}]^2$  le long des droites  $x=0$  et  $y=0$  et au point  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  et ce minimum vaut  $0$ .

$f$  atteint son maximum sur le carré fermé  $[0, \frac{\pi}{2}]^2$  au point  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$  et ce maximum vaut  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

Fin.