

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif (sur 40). Ce DS est composé de quatre exercices indépendants.*

Exercice 1 [8 points]Soit f l'application définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 .
2. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent.
3. Justifier que f n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 [11 points]Soit l'application f définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
3. Déterminer la matrice jacobienne de f en $(0, 0)$.
4. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
5. f est-elle différentiable sur \mathbb{R}^2 ? Justifier votre réponse.
6. Déterminer les dérivées partielles secondes de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
7. Déterminer les dérivées partielles secondes de f en $(0, 0)$. En déduire la matrice hessienne de f en $(0, 0)$.
8. f est-elle de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 ? Justifier votre réponse.

Tournez svp \rightarrow

Exercice 3 [10 points]

Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*$. On cherche $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe C^2 , solution de l'équation

$$(E) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 4x^3 y^3$$

1. Justifier que U est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
2. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u, v) = (xy; \frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un C^2 -difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$ (on explicitera V et φ^{-1}).

3. Soit $f \in \mathcal{F}(U, \mathbb{R})$ de classe C^2 et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $f = g \circ \varphi$.
 - (a) Justifier que g est de classe C^2 .
 - (b) Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f , en fonction de g , x et y .
4. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 4 [11 points]

Le but de cet exercice est de déterminer les extrema d'une fonction sur un compact.

Soit $D = [0; \frac{\pi}{2}]^2$. Considérons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{2} \sin(2t) & (x, y) &\longmapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x+y) \end{aligned}$$

1. Justifier que D est un compact de \mathbb{R}^2 .
2. Donner sans justifier $\overset{\circ}{D}$, \overline{D} et ∂D .
3. Déterminer les extrema globaux de φ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Montrer que f admet $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ comme unique point critique sur $]0; \frac{\pi}{2}[^2$.
[Indication] On pourra utiliser les formules d'addition de $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \cos(b)\sin(a)$.
5. Étudier les extrema locaux de f sur $]0; \frac{\pi}{2}[^2$.
6. En utilisant les questions précédentes, étudier les extrema globaux de f sur D .

Fin.

"Je ne perds jamais : soit je gagne, soit j'apprends."
Nelson Mandela