ING1-GI Algorithmique procédurale II

Graphes – Coloration

EISTI

Avril 2018

Coloration d'un graphe

Définitions

Définition

Une **coloration (de sommets)** d'un graphe non orienté consiste à affecter une couleur à chacun des sommets. Le coloriage est **propre** si deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

Définition

Si une coloration propre avec k couleurs est possible, alors le graphe est k-**coloriable**.

Définition

Le **nombre chromatique de G**, noté $\chi(G)$, correspond au plus petit entier k pour lequel le graphe est k-coloriable.

Coloriage – Exemple

Imaginons un graphe dont les sommets représentent des produits chimiques et dont les arêtes déterminent que deux produits ne peuvent pas être transportés ensemble. Deux sommets de même couleur seront transportés ensemble (même camion par exemple).
Le nombre chromatique du graphe correspond alors au nombre de camions nécessaires.

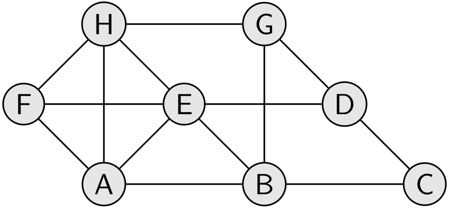


FIGURE – Graphe modélisant les produits non transportable ensemble

Coloriage – Exemple

Le nombre chromatique est de 4 : il faudra donc 4 camions pour transporter les différents produits chimiques.
Une répartition possible est :

- Un premier camion ne transporte que A
- Un deuxième camion ne transporte que F
- Un troisème camion transporte H, B et D
- Un quatrième camion transporte E, G et C.

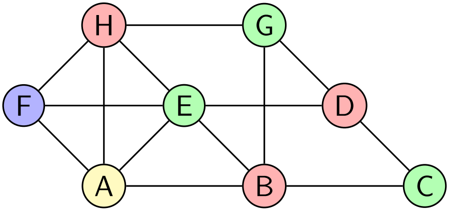


FIGURE – Coloriage du graphe : $\chi(G) = 4$

Algorithmes de coloration

- Algorithme naïf : tester tous les coloriages
  - Combinatoire trop grande
  - Complexité exponentielle
  - Inutilisable en pratique

Algorithme glouton : Welsh-Powell

Soit G un graphe de n sommets

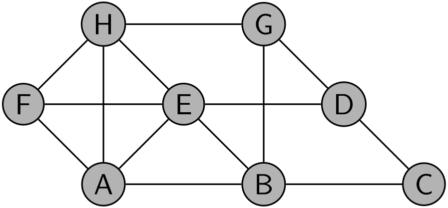
- Trier les sommets par degrés décroissant ;
- Tant qu'il reste des sommets non coloriés
  - Chercher le premier sommet non colorié et le colorier avec une nouvelle couleur
  - Colorier avec cette couleur, selon leur ordre, les sommets non coloriés non adjacents au sommet précédent, ni adjacent entre eux.

Welsh-Powell – Exemple

On trie les sommets par degré décroissant :

sommet	E	A	B	H	D	F	G	C
degré	5		4			3		2

- Graphe d'origine :

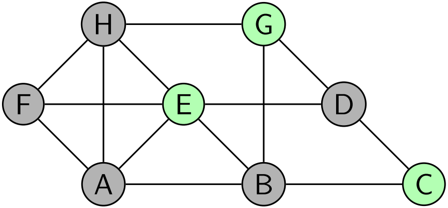


Welsh-Powell – Exemple

On trie les sommets par degré décroissant :

sommet	E	A	B	H	D	F	G	C
degré	5	4			3			2

- Graphe d'origine :
- Couleur 1 : E, G puis C

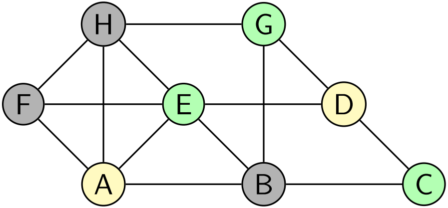


Welsh-Powell – Exemple

On trie les sommets par degré décroissant :

sommet	E	A	B	H	D	F	G	C
degré	5		4			3		2

- Graphe d'origine :
- Couleur 1 : E, G puis C
- Couleur 2 : A puis D

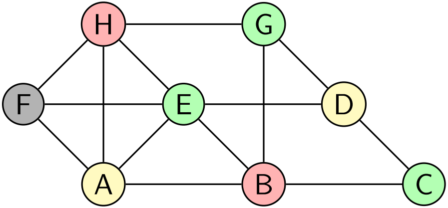


Welsh-Powell – Exemple

On trie les sommets par degré décroissant :

sommet	E	A	B	H	D	F	G	C
degré	5	4			3			2

- Graphe d'origine :
- Couleur 1 : E, G puis C
- Couleur 2 : A puis D
- Couleur 3 : B puis H

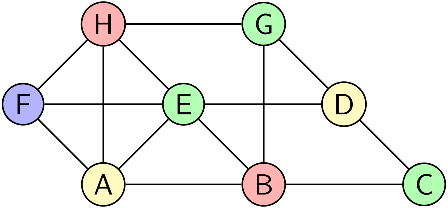


Welsh-Powell – Exemple

On trie les sommets par degré décroissant :

sommet	E	A	B	H	D	F	G	C
degré	5		4			3		2

- Graphe d'origine :
- Couleur 1 : E, G puis C
- Couleur 2 : A puis D
- Couleur 3 : B puis H
- Couleur 4 : F



Remarques

- Il n'existe **aucun théorème ou algorithme** pour déterminer la valeur $\chi(G)$ pour un graphe G quelconque.
- On ne dispose que de théorèmes ou d'algorithmes permettant de **déterminer des majorants ou des minorants** de $\chi(G)$.
- Pour tout graphe G : $\chi(G) \leq$n

Nombre chromatique d'un graphe

PROPOSITION

Soit G un graphe de n sommets. On note $\Delta(G)$ le degré maximal d'un sommet de G. Alors

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Preuve :

D'après l'algorithme glouton, si M est le dernier sommet colorié, il est forcément adjacent avec l'ensemble des couleurs déjà utilisées. Ce nombre ne peut être supérieur à $d(M)$. Donc $\chi(G) \leq d(M) + 1 \leq \Delta(G) + 1$

THÉORÈME des quatres couleurs (1976)

Si G est planaire, alors $\chi(G) \leq 4$.

Nombre chromatique d'un graphe

PROPOSITION

Le nombre chromatique d'un graphe complet vaut : $\chi(K_n) = n$.

Preuve :

- D'après la propriété précédente, $\chi(K_n) \leq n$.
- Comme tous les sommets sont voisins deux à deux, il faut au moins n couleurs, donc $\chi(K_n) \geq n$.

PROPOSITION

Si G' est un sous-graphe de G, alors $\chi(G') \leq \chi(G)$.

COROLLAIRE

Si G contient un sous-graphe complet à p sommets, alors $\chi(G) \geq p$.

Polynôme chromatique d'un graphe

Contraction d'un graphe

Définition

Soit $e = (A, B)$ une arête d'un graphe G. Contracter e consiste à construire un nouveau graphe, noté $G.e$, en remplaçant les sommets A et B par un sommet unique, relié à chacun des sommets qui étaient adjacents à A ou B une seule fois et en éliminant e (donc $G.e$ est simple).

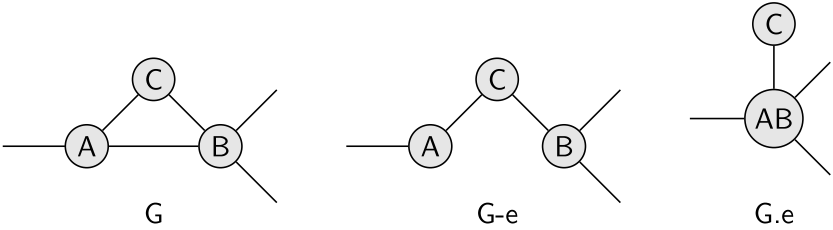


FIGURE – Contraction d'une arête

Polynôme chromatique d'un graphe

Objectif :
Soit un graphe G et une palette de k couleurs. De combien de façon peut-on k-colorier G ?

THÉORÈME

Soit G un graphe simple de n sommets. Il existe un polynôme P de degré n et à coefficients entiers, tel que, pour tout k, le nombre de k-colorations de G soit $P(k)$. Ce polynôme est appelé le **polynôme chromatique de G**.

Idée de preuve :
Soit la taille de G , $t(G) = n + m$ avec n et m les nombres de sommets et d'arêtes de G. Récurrence sur $t(G)$:

- Si aucune arête dans G, on peut attribuer n'importe laquelle des k couleurs aux sommets : k^n possibilités
- Si G possède au moins une arête e, on considère les graphes $G - e$ et $G.e$ de tailles inférieures à $t(G)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on sait que leurs polynômes chromatiques Q et R sont de degrés n et $n - 1$. On montre alors que le nombre de k-colorations de G vaut $Q(k) - R(k)$.

Polynôme chromatique d'un graphe

PROPOSITIONS

- Le polynôme chromatique d'un graphe à n sommets isolés est

$$P(X) = X^n$$

- Le polynôme chromatique d'un arbre à n sommets est

$$P(X) = X(X-1)^{n-1}$$

- Le polynôme chromatique d'un carré est

$$P(X) = X(X-1)^3 - X(X-1)(X-2)$$

Coloriage d'arêtes

Coloriage d'arêtes

Objectif :

Dans certains cas, il peut y avoir plusieur types de relations entre sommets. On peut alors représenter ces différents types de relations par des arêtes de couleurs différentes.

Exemple :

Dans une soirée, des personnes peuvent être amies, ennemies ou ne pas se connaître. On relie les sommets (personnes) par des arêtes de couleurs différentes selon leur type de relation.

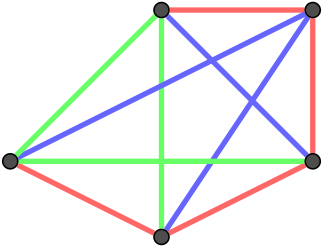


FIGURE – Coloration d'arêtes

Problèmes extrémaux

Problèmes extrémaux

Exemple de problème extrêmal

- Soit n points dans un plan, sans en avoir 3 alignés.
- On trace des segments reliant certains de ces points.
- Quels que soient nos choix, à force de tracer des segments on finira par faire apparaître au moins un triangle.
- **Question** : quel est le nombre maximal de segments que l'on puisse tracer sans qu'un tel triangle existe ?
- **Question** : quel est le nombre minimal de segments qui assure de l'existence d'un triangle, et ce quelle que soit la façon dont on va ensuite choisir les segments ?

Problèmes extrémaux

Définition

Soit $P(G)$ un prédicat sur l'ensemble des graphes.
Un graphe non orienté $G = (X, E)$ est dit **extrêmal pour** P si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $P(G)$ n'est pas vraie ;
- pour toute arête $e \notin E$, $P(G + e)$ est vraie.

En général, dans les problèmes extrémaux, on cherche à déterminer la plus grande (ou plus petite) valeur pour laquelle une propriété est vrai.

Problèmes extrémaux

THÉORÈME (MANTEL - 1906 & TÚRAN - 1941)

Soit G un graphe simple et non orienté à n sommets ne contenant pas de triangle. Alors G ne possède pas plus de $\dfrac{n^2}{4}$ arêtes.

Exemple :

Soit un graphe simple sans triangles de 4 sommets.
Il n'a pas plus de $4^2/4 = 4$ arêtes.

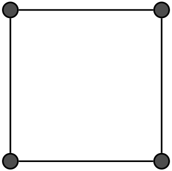


FIGURE – Graphe sans triangle

Problèmes extrémaux

THÉORÈME (MANTEL - 1906 & TÚRAN - 1941)

Soit G un graphe simple et non orienté à n sommets ne contenant pas de triangle. Alors G ne possède pas plus de $\frac{n^2}{4}$ arêtes.

Exemple :

Soit un graphe simple sans triangles de 4 sommets.
Il n'a pas plus de $4^2/4 = 4$ arêtes.

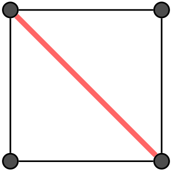


FIGURE – Graphe sans triangle

Problèmes extrémaux

THÉORÈME (MANTEL - 1906 & TÚRAN - 1941)

Soit G un graphe simple et non orienté à n sommets ne contenant pas de triangle. Alors G ne possède pas plus de $\frac{n^2}{4}$ arêtes.

Exemple :

Soit un graphe simple sans triangles de 4 sommets.
Il n'a pas plus de $4^2/4 = 4$ arêtes.

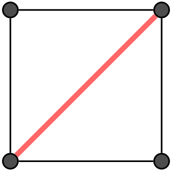


FIGURE – Graphe sans triangle