

Tournées eulériennes et hamiltoniennes

ING1-GI Algorithmique procédurale II

EISTI

2019-2020



1 Chaînes et cycles eulériens

- Définition
- Conditions d'existence
- Algorithme

2 Cycles hamiltoniens

- Définition
- Conditions d'existence
- Problème du voyageur de commerce

Chaînes et cycles eulériens



Chaînes et cycles eulériens

Définition

Une **chaîne eulérienne** d'un graphe G est une chaîne simple qui contient toutes les arêtes de G .

Un **cycle eulérien** de G est une chaîne eulérienne fermée.

Définition

Un graphe est dit **eulérien** s'il possède un **cycle eulérien**.

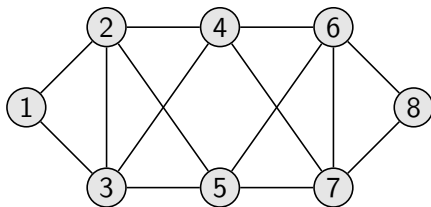


FIGURE – Graphe eulérien : $\{1,2,5,6,8,7,4,3,2,4,6,7,5,3,1\}$

Origines

Problème des ponts de Königsberg

Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer **une et une seule fois** par chaque pont, et de **revenir à son point de départ**, étant entendu qu'on ne peut traverser le *Pregel* qu'en passant sur les ponts.

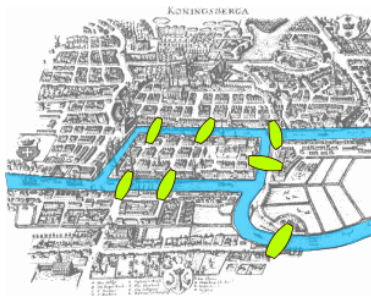


FIGURE – Königsberg (actuellement Kaliningrad) au XVIII^e siècle

Origines

On modélise le graphe représentant la topologie de Königsberg en associant les sommets à des rives et les arêtes aux ponts reliant les rives. On obtient le graphe G ci-contre.

Le problème des sept ponts de Königsberg se ramène alors au problème suivant :

G est-il eulérien ?

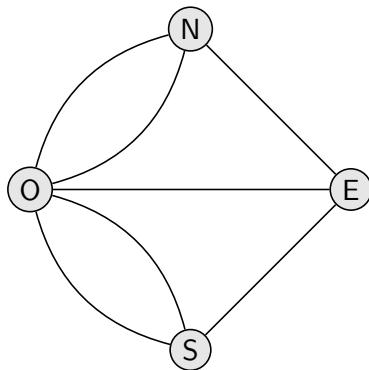


FIGURE – Graphe G représentant Königsberg

Théorème d'Euler - 1

THÉORÈME

Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien si et seulement si **tous ses sommets sont de degrés pairs**.

Preuve (condition nécessaire) :

- En suivant le cycle eulérien de graphe :
- On passe par chaque sommet un nombre pair de fois car :
- chaque fois qu'on arrive à un sommet on repart via une autre arête ;
- chaque fois, par des paires d'arêtes différentes, etc.
- Jusqu'à arriver au point de départ.



Théorème d'Euler - 2

THÉORÈME

Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien si et seulement si **tous ses sommets sont de degrés pairs**.

Preuve (condition suffisante) :

- Pour $m = 1$ la propriété est vraie (un sommet et une boucle).
- Supposons que la propriété est vraie pour un graphe ayant un nombre d'arêtes strictement inférieur à m .
- Soit un graphe de degré $> m$. Le degré minimale est de 2 (car le graphe est connexe).
- Soit C un cycle de G . Soit $E(C)$ l'ensemble des arêtes de C .
- $G - E(C)$ les composantes connexes du graphe restant.
- Soient H_1, \dots, H_k les composantes de $G - E(C)$.



Théorème d'Euler - 2 (suite)

THÉORÈME

Un graphe connexe G tel que $m \geq 1$ est eulérien si et seulement si **tous ses sommets sont de degrés pairs**.

Preuve (condition suffisante - suite) :

- Chaque H_i étant un graphe eulérien (par hypothèse de récurrence)
- Soit C_i le cycle eulérien de H_i . Il existe au moins un sommet x_i commun entre C et C_i (puisque le graphe G est connexe)
- On peut définir un cycle eulérien dans le graphe en intercalant C_i dans C au sommet x_i pour chaque i dans $1..k$.



Théorème d'Euler - 3

CORROLAIRE

Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degrés impairs est inférieur ou égal à 2.

Preuve :

- Tout graphe a un nombre pair de sommets impairs.
- Si G n'a pas de sommets impairs, il est eulérien et donc a une chaîne eulérienne (fermée).
- Si G a deux sommets impairs x et y , nous construisons G' à partir de G en ajoutant une arête e entre x et y .
- Le graphe G' obtenu est eulérien.
- Le cycle eulérien restreint à G est une chaîne reliant x à y (et ne passant pas par e).



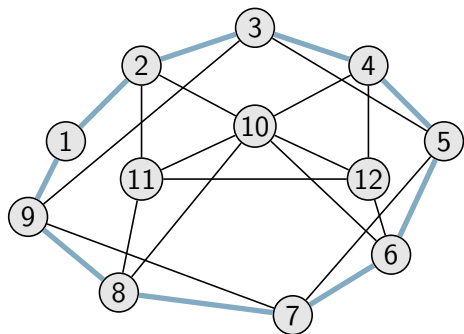
Algorithmme

```
fonction Euler( $G$ ): cycle  
  construire-Cycle( $C, G$ )  
  si  $E(G) \setminus E(C) \neq \emptyset$  alors  
    déterminer-Composantes( $H_1, H_2, \dots, H_k$ )  
     $i \leftarrow 1$   
    tant que  $i \leq k$  faire  
       $C_i \leftarrow \text{Euler}(H_i)$   
    fin tant que  
    intercaler( $C_1, C_2, \dots, C_k$ )  
  fin si  
  retourner  $C$   
fin fonction
```

- Algorithmme linéaire : $O(m)$

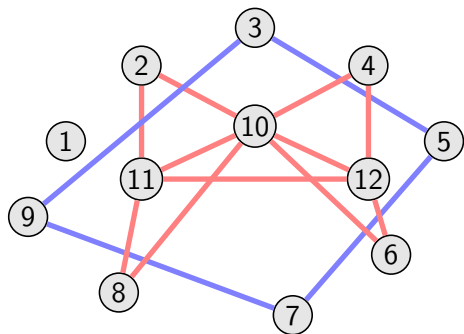


Exemple



construire-Cycle :
 $C = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,1)$

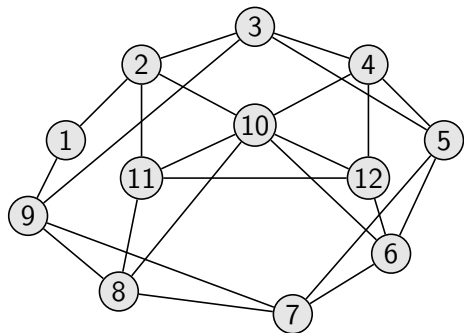
Exemple



Deux composantes connexes
 H_1, H_2

- $C_1 = (2, 10, 12, 11, 10, 4, 12, 6, 10, 8, 11, 2)$ obtenu après l'appel récursif en intercalant $(10, 12, 11)$ dans $(2, 10, 4, 12, 6, 10, 8, 11, 2)$
- $C_2 = (3, 5, 7, 9, 3)$

Exemple



Cycle eulérien : (1, 2, 10, 12, 11, 10, 4, 12, 6, 10, 8, 11, 2, 3, 5, 7, 9, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1)

Cycles hamiltoniens



Chaînes et cycles hamiltoniens

Définition

Une chaîne ou un cycle C de G (un graphe non orienté) est dit **hamiltonien(ne)** si et seulement tout sommet x de X est contenu dans C sans répétition.

Définition

Un graphe non orienté est dit **hamiltonien** s'il possède un **cycle hamiltonien**.

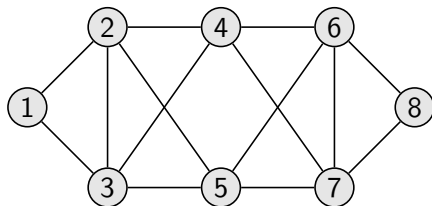


FIGURE – Graphe hamiltonien : $\{1,2,4,6,8,7,5,3,1\}$

Propriétés et Théorèmes

PROPOSITION (Condition nécessaire)

Soit $G = (X, E)$ un graphe hamiltonien, et $Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$. Le nombre de composantes connexes de $G - Y$ ne dépasse pas $\text{card}(Y)$.

THÉORÈME (Condition suffisante)

Un graphe simple $G = (X, E)$ est hamiltonien si, quelques soient deux sommets non voisins x et y , $d(x) + d(y) \geq n$.

- Pour tout entier naturel $n \geq 3$, K_n est hamiltonien et admet $\frac{(n-1)!}{2}$ cycles hamiltoniens.
- Un graphe biparti $G = (X_1, X_2, E)$ est hamiltonien si et seulement si $\text{card}(X_1) = \text{card}(X_2)$



Problème du voyageur de commerce (PVC)

Traveling Salesman Problem (TSP)

On se donne un ensemble de villes toutes reliées directement entre elles. Quelle est la tournée la plus courte couvrant toutes les villes une fois et une seule ?

- Modélisation : le graphe représente la cartographie de l'ensemble des villes
 - ▶ sommets : villes
 - ▶ arêtes : routes entre les villes
 - ▶ valuation : distance
- Le graphe G obtenu doit être complet à valuations positives
- **PVC correspond à trouver un cycle hamiltonien C dans G tel que $v(C)$ soit minimal.**



Problème du voyageur de commerce (PVC)

THÉORÈME (KARP, 1972)

Le problème PVC est un problème NP-complet.

En théorie de la complexité, un problème NP-complet vérifie les propriétés suivantes :

- Il est possible de **vérifier** une solution efficacement (en temps polynomial), mais il est impossible (?) de **trouver** une solution efficacement.
- Tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale.
 - ▶ s'il existe une solution polynomiale pour un des problèmes NP-complet, alors ils peuvent être tous résolus en temps polynomial
 - ▶ savoir si $P=NP$ ou $P \neq NP$ fait parti des problèmes non résolus en mathématiques



PVC : Solutions ?

- Première solution : effectuer une recherche exhaustive
 - ▶ recenser tous les cycles hamiltoniens ;
 - ▶ en choisir un parmi ceux avec la valeur la plus faible.
 - ▶ solution exacte, mais complexité exponentielle : $O\left(\frac{(n-1)!}{2}\right)$
 - ▶ solution inutilisable

Quelques chiffres

Si calculer un chemin se fait en 1 microseconde :

- pour 10 sommets, il faudrait 0.18 secondes ;
- pour 15 sommets, il faudrait un peu plus de 12h ;
- pour 20 sommets, il faudrait 1927 ans.



PVC : Solutions ?

- Deuxième solution : appliquer un algorithme "glouton"
 - ▶ on initialise le cycle avec un sommet du graphe choisi arbitrairement ;
 - ▶ le sommet suivant est le sommet adjacent non encore visité le plus proche (en terme de valuation d'arête).
 - ▶ solution approchée

Définition

Un algorithme est dit **glouton** lorsqu'il suit le principe de faire, étape par étape, un choix optimum local.



PVC : Notion d'algorithme ε -approché

Définition

Un algorithme est dit ε -**approché** si et seulement si pour toute instance $G = (X, E, \omega)$ du problème PVC, il fournit un cycle hamiltonien C tel que

$$\frac{\omega(C)}{\omega^*(G)} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

Dans le cas du PVC géographique, la voie directe entre deux villes est toujours la voie la plus courte. Donc :

$$\forall (x, y, z) \in X^3, \omega(xy) \leq \omega(xz) + \omega(zy)$$



PVC Géographique : algorithme approché

Soit $G = (X, E, \omega)$ une instance du PVC

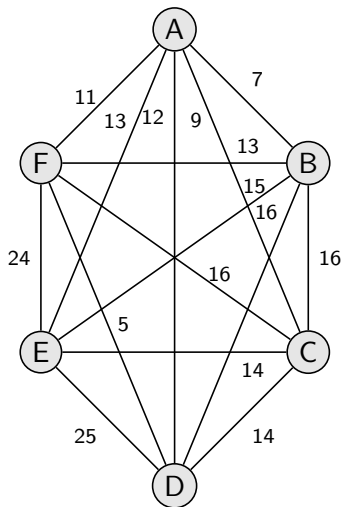
- 1 Calculer arbre couvrant minimal T de G .
- 2 Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U .
Trouver le cycle eulérien D de U .
- 3 Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant : on obtient le cycle hamiltonien C .

THÉORÈME

Cet algorithme est $\frac{1}{2}$ -approché pour tout instance métrique du PVC.

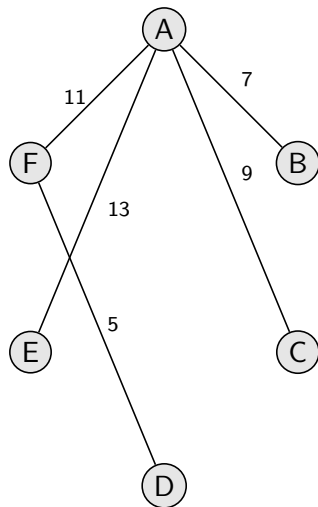


PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



Soit $G = (X, E, \omega)$ une instance du PVC

PVC Géographique : algorithme approché – Exemple

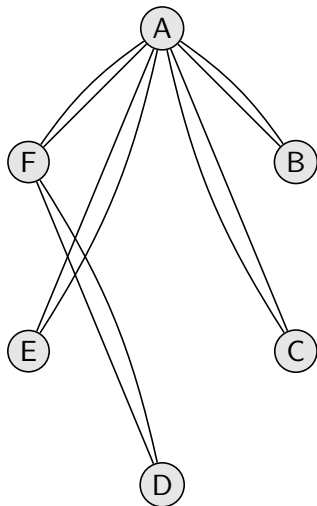


Etape 1 :

Calculer arbre couvrant minimal
 T de G .



PVC Géographique : algorithme approché – Exemple

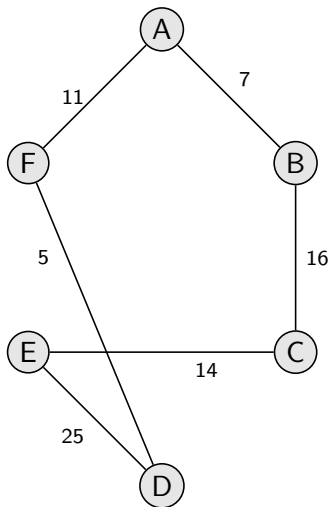


Etape 2 :

Doubler chaque arête de T pour obtenir un graphe eulérien U .
Trouver le cycle eulérien D de U .

$$D = (a, f, d, f, a, e, a, c, a, b, a)$$

PVC Géographique : algorithme approché – Exemple



Etape 3 :

Raccourcir la suite de D en supprimant tout sommet déjà rencontré auparavant : on obtient le cycle hamiltonien C .

$$D = (a, f, d, f, a, e, a, c, a, b, a)$$

$$C = (a, f, d, e, c, b, a)$$

PVC Géographique : algorithme approché – Justification

Cet algorithme est $\frac{1}{2}$ -approché pour toute instance métrique du PVC.

- L'arbre couvrant minimum vérifie la relation $\omega(T) \leq \omega^*(G)$
- La valeur totale du cycle eulérien D : $\omega(D) = 2\omega(T)$
- Un raccourcissement d'une chaîne (x_1, x_2, \dots, x_k) par (x_1, x_k) vérifie :

$$\omega(x_1, x_k) \leq \sum_{i=1}^{k-1} \omega(x_i, x_{i+1})$$

- On a donc : $\omega(C) \leq \omega(D) = 2\omega(T)$, donc $\omega(C) \leq 2\omega^*(G)$ d'où :

$$\frac{\omega(C)}{\omega^*(G)} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$$

