Théorie des graphes

Réseaux de transports

EISTI – ING1

2014 – 2015

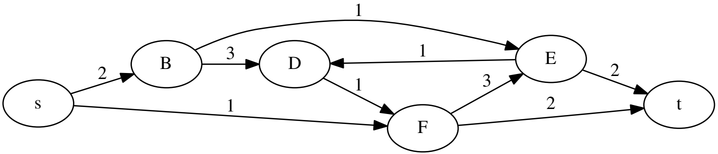
Plan

Réseau de transport

Définition (Réseau de transport)

Un **réseau de transport** est un graphe orienté simple et valué $R = (X, A, c)$ tel que :

- il existe une unique source s et un unique puits t ;
- il existe un chemin de s à t ;
- c est une fonction à valeurs positive appelée **capacité de R**.
- pour tout arc de A, son arc opposé n'est pas dans A.



Rappel

R étant simple, A est identifié à un sous-ensemble de $X \times X$.

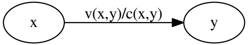
Flot dans un réseau de transport

Définition (Flot)

Soit $R = (X, A, c)$ un réseau de transport. Un **flot sur R** est une valuation v du graphe $G = (X, A)$ telle que :

- $\forall (x, y) \in A,\ 0 \leq v(x, y) \leq c(x, y)$;
- $\forall x \in X \backslash \{s, t\},\ \sum_{(a,x) \in A} v(a, x) = \sum_{(x,b) \in A} v(x, b)$

  (*loi de* Kirchhoff)

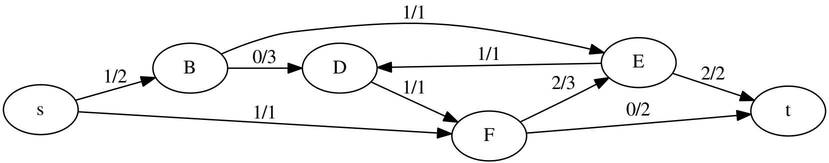


Définition (Valeur d'un flot)

Soit $R = (X, A, c)$ un réseau de transport et v un flot sur R.
La **valeur de v** est la quantité $\sum_{(s,x) \in A} v(s, x) = \sum_{(x,t) \in A} v(x, t)$.

Un flot v est dit **maximal** si et seulement si sa valeur est maximale parmi tous les flots sur R.

Flot dans un réseau de transport : exemple



Valeur du flot : $v(s, B) + v(s, F) = 1 + 1 = 2$

Coupe

Définition (Coupe)

Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté. Une **coupe sur G** est :

- une partition $\{X_1, X_2\}$ des sommets de X ;
- ou, de manière équivalente, l'ensemble des arcs dont l'origine est dans X_1 et la destination dans X_2.

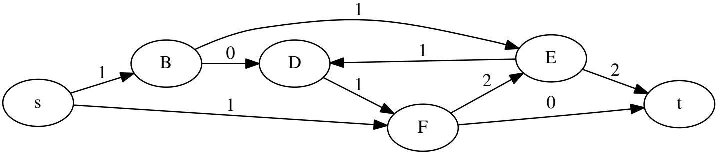
Une **coupe s − t sur G** est une coupe $\{X_1, X_2\}$ sur G telle que $s \in X_1$ et $t \in X_2$.

Définition (Poids d'une coupe)

Soit $G = (X, A, v)$ un graphe orienté et $\mathcal{C}$ une coupe sur G.
Le **poids de $\mathcal{C}$** est la quantité $\displaystyle\sum_{(x_1,x_2)\in X_1\times X_2} v(x_1, x_2)$.

Une coupe $s - t$ $\mathcal{C}$ est dite **minimale** si et seulement si son poids est minimal parmi toutes les coupes $s - t$ sur G.

Coupe : exemple



- $\mathcal{C} = \{\{s, B, D\}, \{E, F, t\}\}$ est une coupe $s - t$.
- $\mathcal{C} = \{BE, DF, sF\}$ représente la même coupe $s - t$.
- poids de $\mathcal{C}$: $v(B, E) + v(D, F) + v(s, F) = 1 + 1 + 1 = 3$

Recherche de flot maximal

Lien avec l'optimisation linéaire

Soit $R = (X, A, c)$ un réseau de transport.
On note $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $x_1 = s$ et $x_n = t$, ainsi que
$$c_{ij} = \begin{cases} c(x_i, x_j) & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$
Pour tout flot v sur R, $v_{ij} = \begin{cases} v(x_i, x_j) & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$
Alors la recherche de flot maximal sur R se ramène au problème :

$$\begin{cases} \max \displaystyle\sum_{i=2}^{n} v_{1i} \\ \qquad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \,,\; 0 \leq v_{ij} \leq c_{ij} \\ \qquad \forall i \in [\![2, n-1]\!] \,,\; \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_{ki} - \sum_{k=1}^{n} v_{ik} = 0 \quad (\text{loi de } \textsc{Kirchhoff}) \end{cases}$$

Recherche de flot maximal

Réseau de transport associé à un graphe biparti

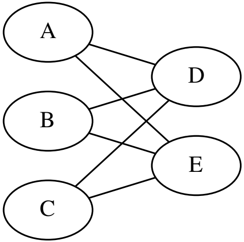
Soit $G = (X_1, X_2, E)$ un graphe biparti. On construit le réseau de transport $R = (X, A, c)$ de la manière suivante.

- On ajoute deux sommets s et t.
- Pour toute arête de G entre $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$, on crée un arc de R de x_1 vers x_2.
- Pour tout $x_1 \in X_1$, on ajoute un arc de s vers x_1.
- Pour tout $x_2 \in X_2$, on ajoute un arc de x_2 vers t.
- Tout arc a une capacité de 1.

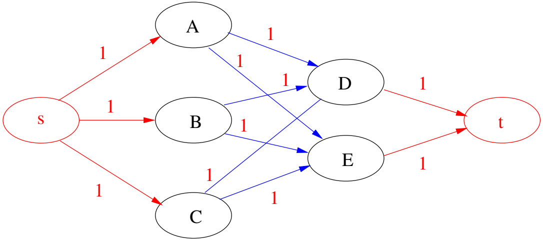
Théorème

Rechercher un couplage maximal dans un graphe biparti revient à rechercher un flot maximal dans le réseau de transport associé.

Recherche de flot maximal



$K_{3,2}$



Réseau de transport associé

Recherche de flot maximal

Théorème (Flot-max/coupe-min)

Soit $R = (X, A, c)$ un réseau de transport de source s et de puits t. Alors la valeur d'un flot maximal sur R est égal au poids d'une coupe minimale $s - t$ sur le graphe orienté valué (X, A, c).

Algorithmes

Ford-Fulkerson (1956)

Algorithme adapté aux capacités à valeurs entières

Peu adapté pour des flots de grande valeur

Edmonds-Karp (1972)

Modification de l'algorithme précédent en forçant une recherche en largeur d'abord du chemin P

etc...

Algorithme de Ford-Fulkerson

Calcul d'un flot maximal

Soit $R = (X, A, c)$ un réseau de transport de source s et de puits t.

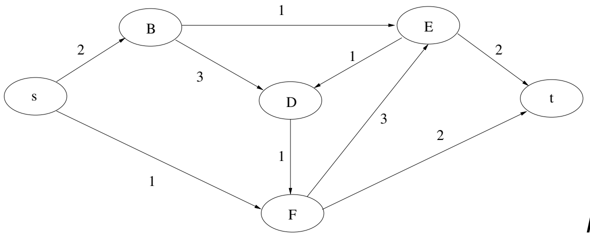
0. On part d'un flot nul, i.e. $v(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in A$.
1. Tant qu'il existe un chemin P de s à t dans R tel que $c(P) = \min_{(x,y)\in P} c(x, y) > 0$, on met à jour R :

   Pour toute arête $(x, y) \in P$:

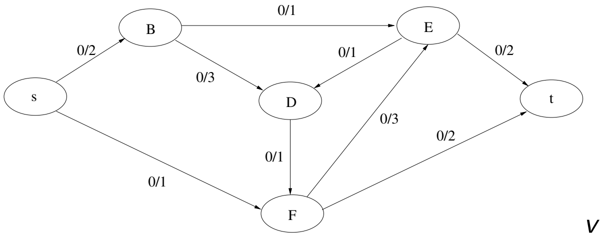
   - $c(x, y) \leftarrow c(x, y) - c(P)$
   - $c(y, x) \leftarrow c(x, y) + c(P)$
     [si l'arc (y, x) n'existait pas, on le crée]
2. Si un tel chemin n'existe pas, v est un flot maximal et l'algorithme s'arrête.

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Itération n° 0



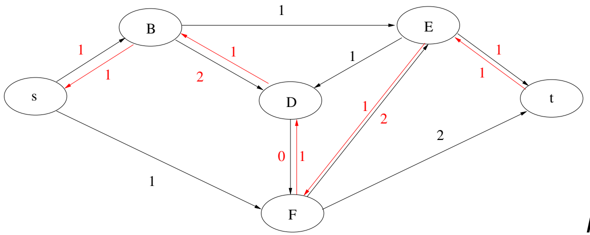
R



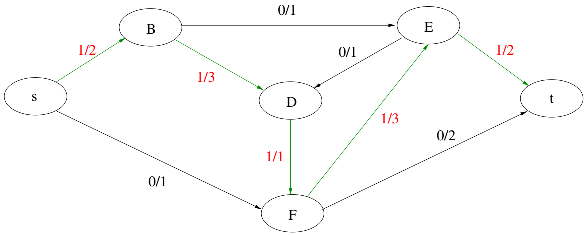
v

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Itération n° 1 : $P = sBDFEt$, $c(P) = 1$



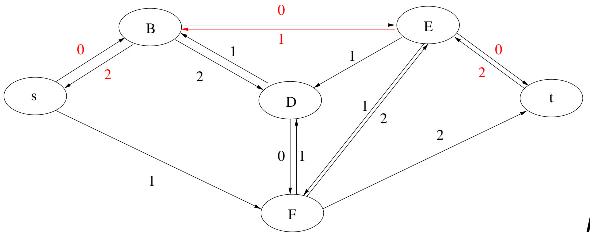
R



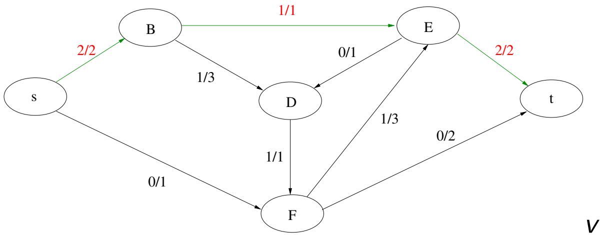
v

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Itération n° 2 : $P = sBEt$, $c(P) = 1$



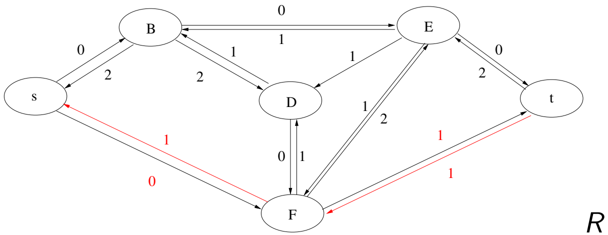
R

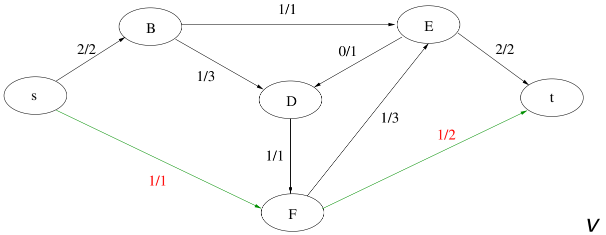


v

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Itération n° 3 : $P = sFt$, $c(P) = 1$

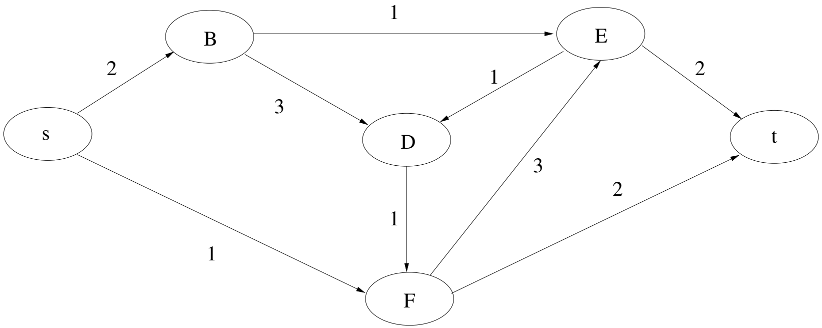




Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Recherche de coupe minimale

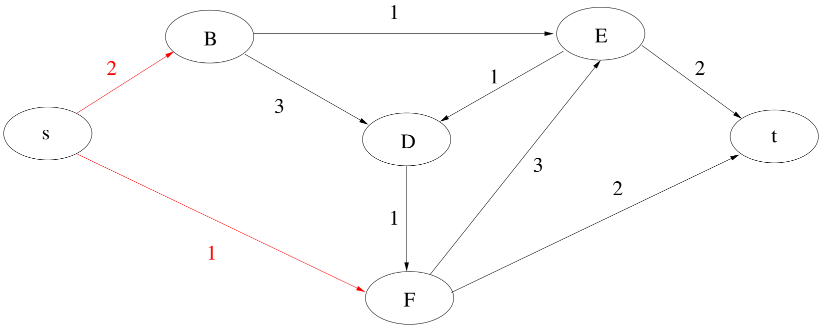
La valeur du flot maximal trouvé est 3, donc toute coupe minimale a un poids égal à 3.



Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Recherche de coupe minimale

La valeur du flot maximal trouvé est 3, donc toute coupe minimale a un poids égal à 3.

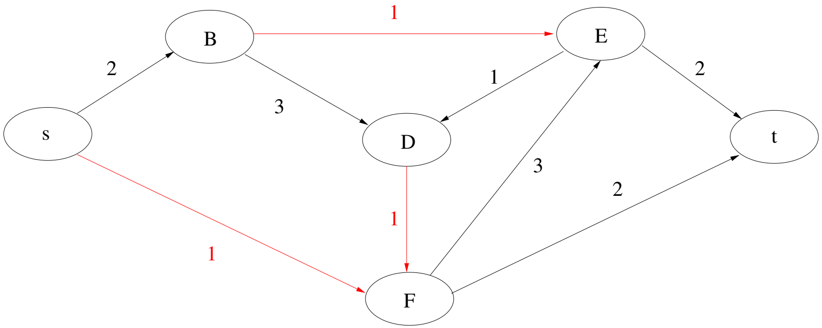


$\{sB, sF\}$ est une coupe minimale de poids 3

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

Recherche de coupe minimale

La valeur du flot maximal trouvé est 3, donc toute coupe minimale a un poids égal à 3.



$\{BE, DF, sF\}$ est une coupe minimale de poids 3