<table>
<tr><td rowspan="4">EISTI</td><td colspan="2">Cycle préparatoire 2^{ème} année
Devoir surveillé 1
K. El Amine, J.-M. Masereel, E. Masnada</td></tr>
<tr><td>Matière : Analyse dans $\mathbb{R}^n$</td><td>Date : Vendredi 19 octobre 2018</td></tr>
<tr><td>Appareils électroniques et documents interdits</td><td>Durée : 2 heures</td></tr>
<tr><td></td><td>Nombre de pages : 5</td></tr>
</table>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte trois exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

⋄ ⋄ ⋄

Exercice 1. Montrer que dans un espace vectoriel $(E; ||.||)$, un ouvert est la réunion de boules ouvertes.
Indication : On peut utiliser le fait qu'un ensemble est la réunion de tous ses points.

⋄ ⋄ ⋄

Si A est un ouvert, c'est un voisinage de tous ses points donc pour tout x, il existe r_x tel que $B(x, r_x) \subset A$.
Or $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A$.

Exercice 2. Soit l'application N définie par

$$N: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto N(x, y) = 2|x| + |y|$$

1. Rappeler la définition d'une norme.
2. L'application N est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer ET dessiner la boule fermée de centre $(0, 0)$ et de rayon $r = 1$.

On définit l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \geq 0 \text{ et } 2|x| + y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ y \leq 0 \text{ et } 2|x| - y < 1\}$$

4. Dessiner l'ensemble A.
5. Déterminer si l'ensemble A est un ouvert, un fermé ou aucun des deux :
   (a) En utilisant les boules ouvertes.
   (b) En utilisant la caractérisation séquentielle.
6. Déterminer par la méthode de votre choix l'adhérence $\overline{A}$ de A.
7. Déterminer l'intérieur de A.

⋄ ⋄ ⋄

1. N est une norme si et seulement si elle vérifie
   (a) $N(X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0_A$.

(b) $\forall X \in A,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ N(\lambda X) = |\lambda| N(X)$

(c) $\forall X, Y \in A,\ N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$

2. On considère donc $N(x,y) = 2|x| + |y|$

   (a) — Si $N(x,y) = 0$ alors $2|x| + |y| = 0 \Longrightarrow x = y = 0$ donc $X = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   — Si $X = 0_{\mathbb{R}^2}$ alors $N(X) = N(0,0) = 0$.

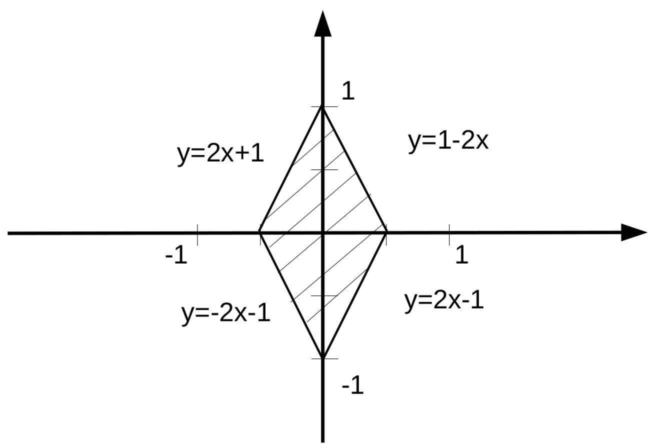
   (b) Soit $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda X = (\lambda x, \lambda y)$. On a alors

   $$N(\lambda X) = 2|\lambda x| + |\lambda y| = |\lambda| N(X)$$

   (c) Soit $X = (x,y)$ et $X' = (x', y')$. Donc $X + X' = (x + x', y + y')$. Alors

   $$N(X + X') = 2|x + x'| + |y + y'| \leq 2|x| + 2|x'| + |y| + |y'| = N(X) + N(X')$$

3. L'équation du cercle unité est $N(x,y) = 1$, c'est-à-dire $2|x| + \left|y\right| = 1$. Quatre cas se présentent suivant les signes de x et y et nous obtenons quatre portions de droites. Sur la figure suivante est donnée la boule fermée avec les différentes équations de droite

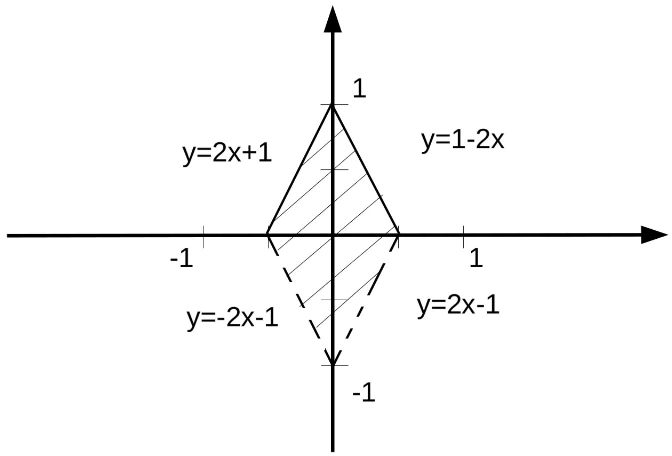


4. Dessin de l'ensemble A

5. (a) En utilisant les boules :

   Ouvert ? Montrons que ce n'est pas un ouvert en nous plaçant au point $X = (0,1)$ qui appartient à A. En ce point, pour tout $r > 0$, on considère la boule ouverte de la norme 2 : $B_2\big((0,1), r\big)$. Or clairement le point $Y = (0, 1 + \frac{r}{2})$ appartient à $B_2\big((0,1), r\big)$. Mais $Y \notin A$ donc la boule $B_2\big((0,1), r\big)$ n'est pas incluse dans A donc A n'est pas un ouvert.

   Fermé ? Montrons que ce n'est pas un fermé en montrant que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$, que l'on note $C_{\mathbb{R}^2} A$, n'est pas ouvert. Soit le point $X = (0, -1)$ qui appartient à $C_{\mathbb{R}^2} A$. Soit $r > 0$ et considérons la boule de la norme 2 : $B_2\big((0,-1), r\big)$. Prenons le point $Y = (0, -1 + \frac{r}{2})$ alors clairement ce point appartient à $B_2\big((0,-1), r\big)$ mais n'appartient pas à $C_{\mathbb{R}^2} A$. Donc quelques soit $r > 0$, la boule $B_2\big((0,-1), r\big)$ n'est pas incluse dans $C_{\mathbb{R}^2} A$ donc $C_{\mathbb{R}^2} A$ n'est pas un ouvert donc A n'est pas fermé.



(b) En utilisant la caractérisation séquentielle :

Fermé ? Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = (0, 1 - \frac{1}{n}) \in A$. Toutefois $\lim_{n\to\infty} u_n = (0,1) \notin A$. Donc A n'est pas fermé.

Ouvert ? On prend le complémentaire de A dans $\mathbb{R}^2$ que l'on note $C_{\mathbb{R}^2}A$. Si $C_{\mathbb{R}^2}A$ est un fermé alors A est un ouvert. Or prenons la suite (u_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = (0, 1 + \frac{1}{n}) \in C_{\mathbb{R}^2}A$. Or $\lim_{n\to\infty} u_n = (0,1) \notin C_{\mathbb{R}^2}A$. Donc $C_{\mathbb{R}^2}A$ n'est pas fermé. Donc A n'est pas ouvert.

6. Détermination de $\overline{A}$.

Méthode Séquentielle : On montre facilement que si $(x_n, y_n) \in A$ alors par passage à la limite $(x, y) \in \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big)$. On conclue donc de cela que $\overline{A} \subset \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big)$.

Reste à vérifier que $\overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big) \subset \overline{A}$. Or $A \subset \overline{A}$. Il suffit donc d'étudier si pour tout point X de $\overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big) \backslash A$, $X \in \overline{A}$. C'est-à-dire, montrer que tout point de $\overline{B}_N\big((0,0), r)\big) \setminus A$, est limite d'une suite de A.

$$C = \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big) \setminus A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0 \text{ et } y = 2|x| - 1\}$$

Soit $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ et $U = (x, 2|x| - 1) \in C$. Définissons alors la suite (u_n), pour $n > 0$, par $u_n = \big(x, 2|x| - 1 + \frac{1}{n}\big)$. Alors pour n assez grand, $u_n \in A$ et

$$\lim_{n\to\infty} u_n = (x, y = 2|x| - 1) \in \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big)$$

Donc $\overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big) \subset \overline{A}$. Et finalement

$$\overline{A} = \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big)$$

Par la méthode vue en cours : On considère l'ensemble C candidat suivant $C = \overline{B}_N\big((0,0), r = 1\big)$. Nous allons vérifier que ce candidat est bien $\overline{A}$. Démonstration :

Étape 1 : C est bien un fermé puisqu'il s'agit de la boule fermée selon la norme N de rayon $r = 1$ centrée en $(0,0)$.

Étape 2 : On a bien $A \subset C$.

Des étapes 1 et 2, on déduit que

$$\forall x \in C_{\mathbb{R}^2} C,\ \exists V \in \mathcal{V}(x) / A \cap V = 0 \tag{1}$$

où V est un voisinage de x.
On conclut donc de ces deux étapes que $\overline{A} \subset C$. (On peut aussi simplement remarquer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, d'où $\overline{A} \in C$).

Étape 3 : Il reste à vérifier l'inclusion dans l'autre sens : $C \subset \overline{A}$. Pour cela on doit vérifier que tout point de C appartient à $\overline{A}$. Or, on sait que $A \subset \overline{A}$. Il suffit donc de montrer que tout point de $C \setminus A$ appartient à $\overline{A}$. Or

$$C \setminus A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq 0 \text{ et } y = 2|x| - 1\}$$

Or « clairement » pour tout point $(x, y) \in C \setminus A$ et tout $r > 0$, la boule ouverte $B_2\big((x, y), r\big)$ intersecte A. Donc $C \subset \overline{A}$ et finalement $\overline{A} = C$.
Démontrons-le tout de même :
On se place au point $X(x, y)$ tel que $0 \leq x < \frac{1}{2}$ et $y = 2x - 1 > 0$ (coté en bas à droite de la surface du losange). Soit $r > 0$, on considère la boule ouverte selon la norme N : $B_N\big((x, y), r\big)$.
Prenons alors le point $Y\left(x, 2x - 1 + \frac{r}{2}\right) = (x_Y, y_Y)$. Vérifions que Y est dans l'intersection de cette boule de et A.

$$N(Y - X) = N\left(0, \frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2} < r$$
$$2|x_Y| - y_Y = 2x - \left(2x - 1 + \frac{r}{2}\right) = 1 - \frac{r}{2}$$

Pour r assez petit ($r \leq 2$), nous avons

$$0 \leq 1 - \frac{r}{2} < 1$$

7. En utilisant une méthode ressemblant à la seconde méthode développée à la question précédente, on obtient que l'intérieur de A est $B_N\big((0,0), r = 1\big)$.

Exercice 3. Soit n et p deux entiers strictement positifs. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On pose

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \left|a_{i,j}\right| \text{ et } g(A) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \left|a_{i,j}\right|$$

1. Les applications f et g définissent-elles des normes sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$?
2. Si oui, sont-elles équivalentes ?
3. Déterminer $\beta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}\mathbb{R}$, $f(A) \leq \beta g(A)$.
4. On pose $n = p = 2$, $0_{2,2}$ l'élément nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B_1(0_{2,2}; 1)$ la boule unité fermée pour la norme f et $B_2(0_{2,2}; 1)$ la boule unité fermée pour la norme g. Donner un élément C sur la frontière de $B_1(0_{2,2}; 1)$ et un élément D sur la frontière de $B_2(0_{2,2}; 1)$

◇ ◇ ◇

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C = A + B$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

   f :
   - Si $f(A) = 0$, alors nous avons une somme nulle de termes positifs. Ils sont donc tous nuls et A est la matrice nulle.
   - Les coefficients de λA sont les coefficients de A multipliés par λ. Donc $f(A)$ est multiplié par $|\lambda|$.
   - En posant $C = A + B$, $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;p]\!]$, $\left|c_{i,j}\right| = \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leq \left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right|$. Donc en sommant, nous obtenons bien $f(C) \leq f(A) + f(B)$.

   g :
   - Si $g(A) = 0$, alors le plus grand des $a_{i,j}$ en valeur absolue est nul, donc tous les coefficients sont nuls. Donc A est la matrice nulle.
   - Les coefficients de λA sont les coefficients de A multipliés par λ. Donc le maximum des coefficients (en valeur absolue) est multiplié par $|\lambda|$, ainsi que $g(A)$.
   - Attention à la rédaction : $\forall i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall j \in [\![1\,;p]\!]$:

     $$\begin{aligned}\left|c_{i,j}\right| &= \left|a_{i,j} + b_{i,j}\right| \leq \left|a_{i,j}\right| + \left|b_{i,j}\right| \\ &\leq \max\left|a_{i,j}\right| + \max\left|b_{i,j}\right| = g(A) + g(B)\end{aligned}$$

     Ainsi, en passant au max, nous avons l'inégalité triangulaire.

   Les deux fonctions f et g sont donc des normes.

2. L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie. Donc toutes les normes sont équivalentes.

3. Nous avons pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ et tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, $\left|a_{i,j}\right| \leq g(A)$. D'où

   $$f(A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left|a_{i,j}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} g(A) \leq np\,g(A)$$

   Donc $\beta = np > 0$ convient.

4. $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{\pi} \end{pmatrix}$