	Cycle préparatoire 2ème année **Devoir surveillé 2** *K. El Amine, J.-M. Masereel, E. Masnada, Ri. Nuadi, N. Zoghlami*

Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$**	*Date* : **Vendredi 29 novembre 2019**
Appareils électroniques et documents interdits	*Durée* : **2 heures**
	Nombre de pages : **4**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte quatre exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

$\diamond\diamond\diamond$

Exercice 1 (3 points)**.**

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Soit l'application N définie sur E par :

$$\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in E,\; N(A) = |a| + |b|$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Montrer que l'application det (qui à une matrice associe son déterminant) est continue de $(E\,;N)$ dans $(\mathbb{R}\,;|.|)$.

$\diamond\diamond\diamond$

1. (1) Soit A_1, A_2 deux matrices de E. $N(A_1) = 0 \Rightarrow |a_1| + |b_1| = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda A_1) = |\lambda a_1| + |\lambda b_1| = |\lambda|\,N(A_1)$. Et enfin, $N(A_1 + A_2) = |a_1 + a_2| + |b_1 + b_2| \le |a_1| + |a_2| + |b_1| + |b_2| = N(A_1) + N(A_2)$. Donc N est bien une norme.
2. (2)

$$\begin{aligned} N(A_1 - A_2) &= |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| \\ |\det(A_1) - \det(A_2)| &= \left|a_1^2 + b_1^2 - (a_2^2 + b_2^2)\right| = \left|a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2\right| \\ &\le \left|a_1^2 - a_2^2\right| + \left|b_1^2 - b_2^2\right| = |a_1 + a_2||a_1 - a_2| + |b_1 + b_2||b_1 - b_2| \\ &\le |a_1 + a_2|\,N(A_1 - A_2) + |b_1 + b_2|\,N(A_1 - A_2) = N(A_1 - A_2)(|a_1 + a_2| + |b_1 + b_2|) \end{aligned}$$

D'où pour tout $A_1, A_2 \in E$ tel que $A_1 \neq -A_2$, et tout $\varepsilon > 0$, en posant $\eta \le \frac{\varepsilon}{|a_1 + a_2| + |b_1 + b_2|}$, nous avons :

$$N(A_1 - A_2) \le \eta \Rightarrow |\det(A_1) - \det(A_2)| \le \varepsilon$$

Si $A_1 = -A_2$, alors $\det(A_1) = \det(A_2)$, d'où pour tout $\varepsilon > 0$, $|\det(A_1) - \det(A_2)| = 0 \le \varepsilon$.
Nous avons donc montré que l'application det est continue sur les espaces considérés.

Exercice 2 (5,5 points)**.**

1. Soit $(E\,;\|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E telle que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, $\left\|x_p - x_q\right\| \ge 1$. Montrer que (x_n) n'admet pas de sous-suite convergente.
Indication : On pourra utiliser la définition de la convergence d'une suite.

On pose $E=\mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{C})$ et l'application définie sur E par $\left\|f\right\|_\infty=\sup\limits_{t\in[0;1]}\left|f(t)\right|$. On rappelle que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.

2. Soit la suite f_n d'éléments de E, définie par

$$f_n:\left\{\begin{array}{rcl}[0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{2in\pi t}\end{array}\right.$$

   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n appartient à la sphère unité.
   (b) Montrer que pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, $\left\|f_p-f_q\right\|_\infty=2$.
   Indication : On pourra penser à factoriser par l'angle moitié.
3. La sphère unité pour la norme $\|.\|_\infty$ est-elle compacte ?

◇◇◇

1. (2) Soit (x_n) une telle suite et supposons qu'elle admet une sous-suite convergente. Alors il existe $l\in\mathbb{C}$ et une fonction strictement croissante φ tels que $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0,\ \left|x_{\varphi(n)}-l\right|\leq\varepsilon$. Ainsi, pour tout $p\geq n_0$ et $q\geq n_0$, nous avons $\varphi(p)\geq p\geq n_0$ et $\varphi(q)\geq q\geq n_0$, d'où

$$\begin{aligned}1\leq\left|x_{\varphi(p)}-x_{\varphi(q)}\right|&=\left|x_{\varphi(p)}-l+l-x_{\varphi(q)}\right|\\ &\leq\left|x_{\varphi(p)}-l\right|+\left|x_{\varphi(q)}-l\right|\leq 2\varepsilon\end{aligned}$$

   Ceci est donc absurde car c'est censé être vrai pour tout $\varepsilon>0$. Ainsi, la suite ne peut avoir de sous suite convergente.
2. (a) (0,5) Nous avons $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0;1],\left|f_n\right|(t)=\left|\mathrm{e}^{2in\pi t}\right|=1$. Donc $\left\|f_n\right\|_\infty=1$.
   (b) (1+1) De même, pour tout $t\in[0;1]$ et pour tout $p,q\in\mathbb{N}$, avec $p\neq q$

$$\begin{aligned}\left|f_p(t)-f_q(t)\right|&=\left|\mathrm{e}^{2ip\pi t}-\mathrm{e}^{2iq\pi t}\right|=\left|\mathrm{e}^{it(p+q)\pi}\left(\mathrm{e}^{it(p-q)\pi}-\mathrm{e}^{it(q-p)\pi}\right)\right|\\ &=2\left|\sin(t(p-q)\pi)\right|\leq 2\end{aligned}$$

   Or pour $t=\frac{1}{2|p-q|}\in[0;1]$, nous avons $\left|f_p(t)-f_q(t)\right|=2\left|\sin\left(\pm i\frac{\pi}{2}\right)\right|=2$. Donc $\left\|f_p-f_q\right\|_\infty=2$.
3. (1) Nous venons de trouver une suite d'éléments de la sphère telle que $\forall p,q,\left\|f_p-f_q\right\|_\infty=2\geq 1$. Donc d'après la première question, cette suite n'admet de sous-suite convergente. La sphère n'est donc pas compacte.

Exercice 3 (6 points)**.**

1. Déterminer, si elles existent, les limites en $(0,0)$ (ou en $(0,0,0)$) des fonctions suivantes :

   (a) $f_1(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$ (b) $f_2(x,y,z)=\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$

2. Soit α et β deux réels strictement positifs. Soit $f_3:\mathbb{R}^2\backslash\{(0;0)\}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_3(x,y)=\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^2}$$

   Démontrer que f admet une limite en $(0;0)$, si et seulement si $\alpha+\beta>2$.
3. Étudier la continuité des fonctions suivantes :

(a) $f_4(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ \frac{1}{4} & \text{sinon}\end{cases}$

(b) $f_5(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y^2}{x^4+y^6} & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

(c) $f_6(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x;y)\neq(0;0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

⋄ ⋄ ⋄

1. (a) (0,5) $f_1(x,x)\to\frac{1}{2}$ et $f_1(x,-x)\to-\frac{1}{2}$, donc pas de limite.
   (b) (0,5) $f_2(x,0,0)=\frac{1}{x}\to\pm\infty$, donc pas de limite.
2. (1) En passant en polaire : $f_3(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))=\rho^{\alpha+\beta-2}\cos^{\alpha}(\theta)\sin^{\beta}(\theta)$. Or α et β sont strictement positifs, donc le produit de cos et sin est borné. Tout dépend donc de la limite de $\rho^{\alpha+\beta-2}$. La conclusion est alors immédiate : si $\alpha+\beta>2$, il y a une limite qui est nulle, si $\alpha+\beta=2$, il n'y a pas de limite et si $\alpha+\beta<2$, cela tend vers $\pm\infty$.
3. (a) (0,5 + 0,5) $\left|f_4(x,y)\right|=\frac{|x||y|}{|x|+|y|}\leq|y|$, donc la limite est nulle, différente de $f(0,0)=\frac{1}{4}$, donc la fonction n'est pas continue.
   (b) (2) Nous avons

$$\begin{aligned}\left|x^3\right|&=|x|^3=\left(|x|^4\right)^{\frac{3}{4}}=\left(x^4\right)^{\frac{3}{4}}\leq(x^4+y^6)^{\frac{3}{4}}\\ \left|y^2\right|&=|y|^2=\left(|y|^6\right)^{\frac{1}{3}}=\left(y^6\right)^{\frac{1}{3}}\leq\left(y^6+x^4\right)^{\frac{1}{3}}\\ \left|x^3y^2\right|&\leq\left(x^4+y^6\right)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=\left(x^4+y^6\right)^{\frac{13}{12}}\\ \left|f_5(x,y)\right|&\leq\left(x^4+y^6\right))^{\frac{13}{12}-1}=\left(x^4+y^6\right)^{\frac{1}{12}}\xrightarrow[(x;y)\to(0;0)]{}0=f_5(0,0)\end{aligned}$$

   Donc la fonction f_5 est continue en $(0;0)$.

   (c) (1) Sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0;0)\}$, f_6 est continue comme composée et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En (0;0) : $\left|f_6(x,y)\right|\leq\left(|x|+|y|\right)^2\longrightarrow0=f_6(0,0)$. Donc f_6 est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (5,5 points)**.** Soit $(E;\|.\|_E)$ et $(F;\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On note $\|.\|_{E\times F}$ l'application définie sur $E\times F$ par

$$\left\|(x;y)\right\|_{E\times F}=\max\left(\|x\|_E,\|y\|_F\right)$$

On rappelle que cela définit une norme sur $E\times F$.

1. Montrer que si $A\subset E$ et $B\subset F$ sont ouverts, alors $A\times B$ est un ouvert.
2. Montrer que si $A\subset E$ et $B\subset F$ sont fermés, alors $A\times B$ est un fermé.
3. On suppose que $E=F$. Les ensembles A et B sont alors des parties de E et on note

$$A+B=\{x\in E\ /\ \exists(a;b)\in A\times B, x=a+b\}$$

   (a) Montrer que si A ou B est un ouvert, alors $A+B$ est un ouvert.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

⋄ ⋄ ⋄

1. (2) Soit $(x\,;y)\in A\times B$. Il existe $r_1>0$ et $r_2>0$ tel que $\mathring{B}(x\,;r_1)\subset A$ et $\mathring{B}(y\,;r_2)\subset B$. Posons $r=\min(r_1\,,r_2)$. Soit $u(z\,;t)\in\mathring{B}((x\,;y)\,;r)$. On a $\|(x-z\,;y-t)\|_{E\times F}\leq r$. Donc $\max(\|x-z\|_E\,,\|y-t\|_F)\leq r$. D'où
$\|x-z\|_E\leq r\leq r_1$, donc $z\in\mathring{B}(x\,;r_1)\subset A$
$\|y-t\|_F\leq r\leq r_2$, donc $t\in\mathring{B}(y\,;r_2)\subset B$
Finalement $u(z\,;t)\in A\times B$ et $A\times B$ est un voisinage de u, donc ouvert.
2. (1)

$$\begin{aligned}\complement_{E\times F}A\times B&=\left\{(x\,;y)\in E\times F\ /\ x\in\complement_E A,\ \text{et}\ y\in F\right\}\cup\left\{(x\,;y)\in E\times F\ /\ x\in E\ \text{et}\ y\in\complement_F B\right\}\\&=\left(\complement_E A\times F\right)\cup\left(E\times\complement_F B\right)\\&=(\text{ouvert}\times\text{ouvert})\cup(\text{ouvert}\times\text{ouvert})\end{aligned}$$

3. (a) (2) Supposons A ouvert (la démonstration est la même si B est ouvert) et montrons que $A+B$ est un ouvert (donc voisinage de tous ses points). Soit $x=a+b\in A+B$, montrons qu'il existe une boule ouverte centrée en x incluse dans $A+B$. Puisque A est ouvert, il est voisinage de a, donc il existe $r>0$ tel que $\mathring{B}(a,r)\subset A$. Montrons alors que $\mathring{B}(x,r)\subset A+B$. Soit $y\in B(x,r)$. Nous allons montrer que $y-b\in\mathring{B}(a,r)$. Nous avons $\|y-b-a\|=\|y-x\|<r$. Donc $y-b\in\mathring{B}(a,r)\subset A$. En posant $a'=y-b\in A$, nous avons $y=a'+b\in A+B$. Donc $\mathring{B}(x,r)\subset A+B$ et $A+B$ est bien un ouvert.
   (b) (0,5) La réciproque est fausse. Il suffit de se placer sur $E=\mathbb{R}$ avec $A=]0\,;1]\cup[2\,;3[$ et $B=]1\,;2]\cup[3\,;4[$. Ils sont tous les deux non ouverts et pourtant $A+B=]1\,;7[$.