



Cycle préparatoire 2^{ème} année

Examen

K. El Amine, E. Halanay, J.-M. Masereel, E. Masnada

Matière : Analyse dans \mathbb{R}^n

Date : Mercredi 23 janvier 2019

Appareils électroniques et documents interdits

Durée : 3 heures

Nombre de pages : 5

Proposition de correction.

◇◇◇

Exercice 1 (5 points). Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(y)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 & \text{si } (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$.
2. La fonction f est-elle continue en $(0; 0)$?
3. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^1 en $(0; 0)$?
4. La fonction f est-elle de classe \mathcal{C}^2 en $(0; 0)$?

◇◇

1. (0.5 point) Quotient de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas (sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0; 0)\}$).
2. (1 point) En utilisant le fait que pour tout réel, $|\sin(x)| \leq |x|$ et $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, nous avons $|f(x, y)| \leq \frac{|xy(x^2 - y^2)|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 - y^2}{2}$ qui tend vers 0 = $f(0, 0)$. Donc f est continue en $(0; 0)$.

3. (0.5 point) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\sin(y)}{(x^2 + y^2)^2} (x^4 - y^2 + 4x^2 y^2)$.

(0.25 point) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(h, 0) - f(0, 0)) = 0$.

(0.5 point) $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |\sin(y)| \frac{x^4 + y^4 + 4x^2 y^2}{x^4 + y^4 + 2x^2 y^2} \leq 6 |\sin(y)|$ tend vers 0 = $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Donc la première dérivée partielle est continue en $(0; 0)$.

(0.5 point) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} (\cos(y)(x^4 - y^4) - 4y^3 \sin(y))$.

(0.25 point) $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} (f(0, k) - f(0, 0)) = 0$.

(0.5 point) $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \frac{|x|}{(x^2 + y^2)^2} (|\cos(y)|(x^4 + y^4) + 4|y^3||y|) \leq \frac{|x|}{(x^2 + y^2)^2} (x^4 + 5y^4) \leq 6|x|$ qui tend vers 0 = $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Donc la seconde dérivée partielle est continue en $(0; 0)$.

Donc f est de classe \mathcal{C}^1 en $(0; 0)$.

4. (0.25 point) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{h}{h^4} (h^4) \right) = 1$.

(0.25 point) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{\sin(k)}{k^4} (-k^4) \right) = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(k)}{k} = -1$.

(0,5 point) Ces deux dérivées étant distinctes, la contraposée du théorème de Schwarz nous indique que la fonction n'est pas de classe \mathcal{C}^2 en $(0; 0)$.

Exercice 2 (8,5 points). Soit f la fonction définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par

$$f(x, y) = (y + 3x)[\ln(y + 3x) - 1] + \frac{2}{3}(y - 3x)[\sqrt{y - 3x} - 3]$$

1. Justifier que le domaine de définition de f est $D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{y}{3} < x \leq \frac{y}{3}\}$.
2. Dessiner D_f .
3. D_f est-il un ouvert de \mathbb{R}^2 (Justifier)? Un fermé de \mathbb{R}^2 ? (Justifier).
4. Donner, sans justification, l'intérieur de D_f .
Par la suite, on notera D l'intérieur de D_f .
5. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur D .
6. Calculer, pour tout $(x; y) \in D$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
7. Calculer, pour tout $(x; y) \in D$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.
8. Déterminer les points critiques de f sur D .
9. Étudier les extrema locaux de f sur D .
10. Montrer que f est solution sur D de l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{9} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

◇◇

1. (0.5 point) La fonction \ln est définie pour $y + 3x > 0$ et la racine carrée pour $y - 3x \geq 0$. D'où le résultat.
2. (0.5 point) ...
3. (1 point) Nous allons utiliser le critère séquentiel des fermés. Le point $(1; 3)$ est dans D_f , donc pas dans le complémentaire. La suite $u_n = (1; 3 - \frac{1}{n})$ est une suite d'éléments du complémentaire ($1 > 1 - \frac{1}{n}$). Sa limite est pourtant $(1; 3)$. Donc le complémentaire n'est pas fermé et D_f n'est pas ouvert.
(1 point) Le point $(-1; 3)$ n'est pas dans D_f . La suite $v_n = (-1; 3 + \frac{1}{n})$ est une suite d'éléments de D_f ($-1 - \frac{1}{3n} < -1 \leq 1 + \frac{1}{3n}$). Sa limite est pourtant $(-1; 3)$. Donc D_f n'est pas fermé.
4. (0.5 point) $D = \overset{\circ}{D}_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / -\frac{y}{3} < x < \frac{y}{3}\}$.
5. (0.5 point) Les fonctions \ln et $\sqrt{\cdot}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Le domaine D est tel que $y + 3x$ et $y - 3x$ sont dans \mathbb{R}_+^* . La fonction f est donc produit et somme de fonction de classe \mathcal{C}^∞ , donc elle est de classe \mathcal{C}^2 sur D .
6. (0.5 point) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3\ln(y + 3x) - 2\sqrt{y - 3x} + 6$
(0.5 point) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(y + 3x) + \sqrt{y - 3x} - 2$.
7. (0.5 point) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{y + 3x} + \frac{9}{2\sqrt{y - 3x}}$.
(0.5 point [retirer des points s'ils n'utilisent pas Schwarz]) D'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{3}{y + 3x} - \frac{3}{2\sqrt{y - 3x}}$.
(0.5 point) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{y + 3x} + \frac{1}{2\sqrt{y - 3x}}$.
8. (1 point) Les deux dérivées premières s'annulent si et seulement si leur somme et leur différence s'annulent, si et seulement si $\ln(y + 3x) = 0$ et $\sqrt{y - 3x} = 2$, si et seulement si $y + 3x = 1$ et $y - 3x = 4$ (tout est positif), si et seulement si $y = \frac{5}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$.

9. (0.5 point) Au point critique, la hessienne est $H = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 45 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est $\frac{1}{16}(5 \times 9 \times 5 - 9 \times 9) = \frac{9}{16}(25 - 9) = 9 > 0$. Le point critique est donc un extremum local. Le $r = \frac{45}{4} > 0$. C'est donc un minimum local.

10. (0.5 point) C'est direct à partir de la réponse à la question 7.

Exercice 3 (8,5 points). Soit $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$. On se propose de travailler autour de l'équation suivante :

$$\forall (x; y) \in U, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 f(x, y) \quad (1)$$

1. Cette question ne concerne PAS les élèves de la classe 2 de Cergy.

Soit φ la fonction définie sur U dans \mathbb{R}^2 par

$$\varphi(x, y) = (x^2; xy)$$

(a) Montrer que φ est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de U dans $V = \varphi(U)$ que l'on déterminera.

(b) Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur U . On pose $f = g \circ \varphi$.

i. Déterminer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g .

ii. Déterminer les dérivées partielles premières de g en fonction de celles de f .

(c) À l'aide du changement de variables φ , déterminer les solutions de classe \mathcal{C}^1 sur U de l'équation (1).

2. Soit h la fonction définie sur U par

$$h(x, y) = xy e^{x^2} (\ln(x) + \ln(y))$$

(a) Justifier que h est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

(b) Montrer que h est solution de l'équation (1).

(c) Soit $(x_0; y_0) \in U$ fixé. Soit $(x; y) \in U$.

i. Déterminer $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; y_0)} h(x, y)$.

ii. Déterminer $\lim_{(x; y) \rightarrow (x_0; 0)} h(x, y)$.

iii. Déterminer $\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} h(x, y)$.

iv. Déterminer \overline{U} (sans justifier).

v. En déduire un prolongement par continuité de h sur \overline{U} .

◇◇

1. (a) (1 point) Les applications composantes de φ étant des polynômes, elle est de classe \mathcal{C}^1 sur U . En posant, pour $(x; y) \in U$, $(u; v) = (x^2; xy)$, nous avons $u \in U$ et :

$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{u} \\ y = \frac{v}{x} = \frac{v}{\sqrt{u}} \end{cases}$$

Il existe donc une application réciproque φ^{-1} définie sur U par $\varphi^{-1}(u, v) = (\sqrt{u}; \frac{v}{\sqrt{u}})$. L'application φ est donc bijective de U dans U .

Les applications composantes de φ^{-1} sont des quotients de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur U et dont le dénominateur ne s'annule pas sur U . Donc φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur U .

En conclusion φ est bien un \mathcal{C}^2 -difféomorphisme de U dans U .

(b) i. (1 point)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial g}{\partial u} + y \frac{\partial g}{\partial v} = 2\sqrt{u} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{v}{\sqrt{u}} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \frac{\partial g}{\partial u} + x \frac{\partial g}{\partial v} = \sqrt{u} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

ii. (1 point)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{v}{2u\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{y}{2x^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

(c) (1 point) En injectant dans l'équation, on en déduit que pour tout $(u; v) \in U$,

$$2u \frac{\partial g}{\partial u} + v \frac{\partial g}{\partial v} - v \frac{\partial g}{\partial v} = 2ug \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = g$$

Donc il existe une fonction de h classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* telle que $g(u, v) = h_1(v)e^u$. Les solutions f de classe \mathcal{C}^2 sur U solutions de l'équation (1) sont donc les fonctions de la forme

$$f(x, y) = h_1(xy)e^{x^2}$$

avec h_1 de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

2. (a) (0.5 point) La fonction h est un produit et somme de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U (\ln est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^*).

(b) On peut remarquer que $h(x, y) = xy \ln(xy)e^{x^2}$ qui est la forme des solutions de l'équation (1). Ou alors on dérive par rapport à x et y et on injecte :

$$(0.5 \text{ point}) \frac{\partial h}{\partial x} = ye^{x^2} (\ln(xy) + 1 + 2x \ln(xy))$$

$$(0.5 \text{ point}) \frac{\partial h}{\partial y} = xe^{x^2} (\ln(xy) + 1)$$

(0.5 point) d'où le résultat.

(c) i. (0.5 point) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;y_0)} h(x, y) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$.

ii. (0.5 point) $\lim_{(x;y) \rightarrow (x_0;0)} h(x, y) = \lim_{X \rightarrow 0} e^{x_0^2} X \ln(X) = 0$.

iii. (0.5 point) $\lim_{(x;y) \rightarrow (0;0)} h(x, y) = \lim_{X \rightarrow 0} X \ln(X) = 0$.

iv. (0.5 point) $\overline{U} = (\mathbb{R}_+)^2$.

v. (0.5 point) le prolongement se fait en posant $h(0, y_0) = h(x_0, y_0) = h(0, 0) = 0$.

Exercice 4 (4 points). Uniquement pour les élèves de la classe 2 de Cergy. À rédiger sur une copie à part.

Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} par :

$$f(x, y) = xy^2 e^{x^2 y}$$

1. Calculer la matrice jacobienne de f en tout point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Calculer la matrice hessienne de f en tout point $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage du point $a = (1; -1)$.

◇◇

1. (1 point)

$$J = e^{x^2 y} \begin{pmatrix} y^2(1+2x^2 y) \\ x y(2+ y x^2) \end{pmatrix}$$

2. (2 points)

$$H = e^{x^2 y} \begin{pmatrix} 2xy^3(3+2x^2 y) & y(2+7x^2 y+2x^4 y^2) \\ y(2+7x^2 y+2x^4 y^2) & x(2+4yx^2+x^2 y^2) \end{pmatrix}$$

3. (1 point)

$$f(x, y) = f(a) + x \frac{\partial f}{\partial x}(a) + y \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) + \|(x; y)\|^2 \varepsilon(x, y)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{x}{e} - \frac{y}{e} + \frac{1}{2} \left(-2 \frac{x^2}{e} + 6 \frac{xy}{e} - y^2 \right) + \|(x; y)\|^2 \varepsilon(x, y)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{e} \left(1 - x - y - x^2 + 3xy - \frac{1}{2} y^2 \right) + \|(x; y)\|^2 \varepsilon(x, y)$$