



ING2-MI
EXAMEN DE SERIES TEMPORELLES 2017-2018

Durée : 3h

Examen sur Examager
Aucun document autorisé

Consignes

Vous devez rendre

- 1) une archive contenant
 - Le fichier OpenOffice sur lequel vous avez fait vos calculs pour répondre aux questions de l'exercice 2
 - Le script R qui vous a permis de faire l'exercice 3
 - Un pdf avec les réponses et les graphiques
- 2) Une copie avec les réponses à l'exercice 1

Exercice 1 : Processus AR

On considère un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui satisfait

$$X_t = \frac{11}{5}X_{t-1} - \frac{2}{5}X_{t-2} + \epsilon_t$$

où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2 .

1. De quel modèle *AR* s'agit-il? Le processus est-il stationnaire? Quelle est son espérance?
2. Montrer que la fonction d'autocovariance $\gamma(h), h \in \mathbb{Z}$, de $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait une équation de récurrence à déterminer.

4. Quelle doit être la valeur de σ^2 pour que $Var(X_t) = 1$?
5. Déterminer l'expression de

$$\hat{X}_t(1) = EL(X_t | 1, \underline{X}_{t-1}) \quad \text{où} \quad \underline{X}_{t-1} = (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1)$$

Exercice 2 : Estimation par moindres carrés

Nous nous intéressons à la série (x_t) de la consommation (en litres) trimestrielle de crème glacée au Canada entre 2007 et 2016 : ConsoGlaces.csv.

Cet exercice doit être fait à l'aide un tableur.

- 1) Représentez graphiquement la série (x_t) et commentez. Le processus vous semble-t-il stationnaire ?

Quel type de moyenne une moyenne mobile pouvez-vous appliquer pour lisser la série. Faites un graphique de la série observée et la série lissée. Commentez.

Nous allons utiliser le modèle additif

$$x_t = at + b + c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 S_3 + c_4 S_4 + \varepsilon_t \quad (1)$$

où a et b sont les coefficients de la tendance, c_i sont les coefficients de la saisonnalité et ε_t le bruit.

2) Rappelez les hypothèses faites sur les erreurs ε_t

Nous allons estimer les coefficients par la méthode des moindres carrés. Les données de 2007 à 2014 sont utilisées pour estimer les paramètres. Les données de 2015 et 2016 sont utilisées pour valider le modèle.

3) Ecrivez les 10^{èmes} lignes de la matrice du modèle, D , et du vecteur des observations correspondantes.

4) Pourquoi doit-on supprimer la colonne correspondant à S_4 ?

5) Donnez la matrice $({}^t D D)$.

6) Calculez les coefficients du modèle modifié.

7) Déduisez-en l'estimation des coefficients du modèle (1).

8) Calculez les erreurs. Représentez graphiquement les erreurs. Commentez.

9) Représentez sur un même graphique la série observée et la série prédite entre 2007 et 2015. Commentez.

Exercice 3 : Lissage exponentiel et Holt-Winter

Cet exercice doit être fait avec R

1) Simulez les trois séries temporelles suivantes de taille 100 :

$$X_1(t) = 1 + 0.5t + \varepsilon_t, \quad X_2(t) = 250 \sin\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + \varepsilon_t, \quad X_3(t) = 1 + 0.5t + 250 \sin\left(\frac{2\pi t}{50}\right) + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. Transformez les séries simulées dans le classe `ts`.

Les 70 premières données de chaque série vont être utilisées pour prédire les 30 dernières.

2) Représentez graphiquement les trois séries. Commentez.

3) Représentez l'autocorrélation de chaque série.

4) Testez la nullité des premiers coefficients d'autocorrélation de chaque série (ceux qui vous paraissent pertinents). Commentez.

5) En déduire des questions précédentes la forme générale du modèle.

6) Pour chaque série,

- effectuez un lissage exponentiel approprié (simple ou double), précisez les paramètres de lissage trouvés,
- affichez les graphiques nécessaires à l'analyse du lissage,
- commentez les résultats.

- 7) Même question que précédemment mais avec un lissage de Holt-Winters
- 8) Pour chaque série, comparez les résultats des modèles obtenus aux questions 6 et 7 sur les 30 dernières observations :
 - à l'aide de l'erreur quadratique moyenne,
 - en affichant sur un même graphique les prévisions obtenues pour les deux modèles.