	CPI2	Devoir Surveillé n° 3
EISTI CERGY - PAU	Matière : **Analyse dans $\mathbb{R}^n$. Responsable : Pascal KLEIN**	
	Date : **13 Janvier 2016**	
	Durée : **2 heures**	

- Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications. Les réponses devront être justifiées.
- Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous la signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.
- Aucun document n'est autorisé.
- Aucun appareil électronique n'est autorisé.
- Le barème est signalé à titre indicatif. Ce devoir surveillé est composé de **quatre** exercices indépendants.

Exercice 1 Soit l'application $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1) Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 2 Résoudre l'EDP : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variables : $\left(u = \frac{x}{y}, v = xy \right)$.

Exercice 3 Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Le laplacien de f est donné par l'expression $\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

1) Montrer que : $\forall i \in [\![1,n]\!]; \frac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i^2} = (g'' \circ f)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 + (g' \circ f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

2) En déduire l'identité : $\Delta(g \circ f) = (g'' \circ f)\left\|\overrightarrow{grad}\, f\right\|^2 + (g' \circ f)\Delta f$.

3) En déduire le laplacien $\Delta\varphi$ de la fonction $\varphi : \mathbb{R}^3 \backslash \{0,0,0\} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Exercice 4 Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Δf désigne le laplacien de f .

1) Montrer la relation : $\Delta(fg) = g\Delta f + 2\overrightarrow{\text{grad}} f . \overrightarrow{\text{grad}} g + f\Delta g$

2) On suppose que f est strictement positive sur $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer $\Delta(\ln f)$ en fonction de f et de $\overrightarrow{grad} f$.

b) En déduire l'identité : $\Delta(f \ln f) = (\ln f + 1)\Delta f + \frac{\left\|\overrightarrow{grad} f\right\|^2}{f}$