

Le conteneur Graphe

- Définitions du conteneur Graphe
- Les parcours en largeur et en profondeur
- Implémentation du type Graphe
 - Les types Arete et AreteValuee
 - Les méthodes sur le type Graphe
- Composantes connexes
- Composantes fortement connexes



Utilité des graphes

- Comme les arbres, de nombreux systèmes sont naturellement des graphes : réseau de routes, WEB : réseau de machines, réseau de chemin de fer, ...
- Problèmes de flot maximum (lien avec la loi de conservation de l'énergie : loi de Kirshoff).
- Processus stochastiques : Chaînes de Markov
- ...



Types de graphes

- Un graphe est complet si tout sommet est relié à tous les autres.
- Un graphe est trivial s'il n'est qu'un sommet isolé.
- Un graphe est k -régulier si tout sommet est de degré k .
- Un graphe $G(S,A)$ est biparti si
 - $S = S_1 \cup S_2 \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$
 - $\forall s_1 \in S_1 \exists s_2 \in S_2 / (s_1, s_2) \in A$
- Un graphe est planaire si les arcs ne se coupent pas



Parcours de graphes

- Comme pour les arbres (ou arborescences), on pourra faire des parcours en largeur ou en profondeur.
- La difficulté dans un parcours de graphe est de ne pas repasser par un sommet.
- Pour régler ce problème, on introduit la notion de marquage de sommet pour se souvenir du passage par un sommet donné
- Principes généraux du marquage booléen
 - Au début de l'algorithme, on démarque (marqué à faux) tous les sommets
 - Dès qu'on passe par un sommet, on le marque (marqué à vrai).
 - On n'étudie plus les sommets marqués



Parcours de graphes en largeur

Parcourir en Largeur G

Marquer à faux tous les sommets de G

Pour chaque sommet s de G

Si s n'est pas marqué (i.e. marqué à faux)

Créer un file f

Enfiler s dans f

Marquer s

Tantque f n'est pas vide

Récupérer s' la tête de f

{ Traiter s' }

Enfiler dans f, tous les successeurs de s' non marqués
(ie marqué à FAUX) et les marquer (ie les marquer à
VRAI)

Fin Tantque

Fin Si

Fin Pour

Parcours de graphes en profondeur

Parcourir en profondeur G

Marquer à faux tous les sommets de G

Pour chaque sommet s de G

Si s n'est pas marqué

Parcourir en profondeur G à partir de s

Fin Si

Fin Pour

Parcourir en profondeur G à partir de s

Marquer s

{ Traiter s }

Pour tous les sommets s' successeur de s

Si s' n'est pas marqué (ou marqué à faux) Alors

Parcourir en profondeur G à partir de s'

Fin Si

Fin Pour



Les type Arete et AreteValuee

- Le type Arete utilise le type Element
Méthode de construction et d'initialisation
 - procédure creerArete(ar : arete (S),orig : Element, dest : Element)Méthodes d'accès
 - fonction recOrigine(ar : Arete) : Element
 - fonction recDestination(ar : Arete) : Element
- Le type AreteValuee utilise les types Arete, Element et Reel
AreteValuee hérite de Arete // On récupère les méthodes d'accès
Méthode de construction et d'initialisation
 - procedure creerAreteValuee(ar : AreteValuee (S), orig : Element, dest : Element, val : Reel)Méthodes d'accès
 - Fonction recValuation(ar : Arete) : Reel



Méthodes de bases du type Graphe

Ce type utilise les types Element et Arete (donc AreteValuee)

Méthodes de construction et d'initialisation

- procedure creerGraphe(gr : Graphe de Element (S))

Méthodes de mise à jour

- procedure ajouterSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)
- procedure ajouterArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)
- procedure supprimerSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)
- procedure supprimerArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)
- procedure marquerGraphe(gr : Graphe de Element(E/S), marque : Booleen (E))
- Procedure marquerSommet(gr : Graphe de Element(E/S), s : Element (E), marque : Booleen (E))



Méthodes de bases du type Graphe

Méthodes d'accès

- fonction `recNbSommets(gr : Graphe de Element) : Entier`
- fonction `recNbAretes(gr : Graphe) : Entier`
- procédure `recSommets(gr : Graphe, ls : Liste de Element (S))`
- procédure `recAretes(gr : Graphe, lar : Liste de Arete (S))`
- fonction `existeArete(gr : Graphe, o : Element, d : Element, ar : Arete (S)) : Booleen`
- fonction `existeSommet(gr : Graphe, s : Element) : Booleen`
- procédure `recSuccesseurs(gr : Graphe, s : Element, ls : Liste de Element (S))`
- procédure `recPredecesseurs(gr : Graphe, s : Element, lp : Liste de Element (S))`



Pré-conditions des méthodes de base

- **gr est initialisé et e n'est pas un sommet du graphe gr**
procédure ajouterSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)
- **gr est initialisé, l'origine et la destination de ar sont des sommets du graphe gr et a n'est pas une arête du graphe gr**
procédure ajouterArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)
- **gr est initialisé et e est un sommet du graphe gr**
procédure supprimerSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)
- **gr est initialisé et a est une arête du graphe gr**
procédure supprimerArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)



Pré-conditions des méthodes de base

- **gr est initialisé**
fonction `recNbSommets(gr : Graphe de Element) : Entier`
fonction `recNbAretes(gr : Graphe) : Entier`
procédure `recSommets(gr : Graphe, ls : Liste de Element (S))`
procédure `recAretes(gr : Graphe, lar : Liste de Arete (S))`
fonction `existeSommet(gr : Graphe, s : Element) : Booleen`
- **gr est initialisé et o et d sont des sommets du graphe gr**
fonction `existeArete(gr : Graphe, o : Element, d : Element, ar : Arete (S)) : Booleen`
- **gr est initialisé et s est un sommet du graphe gr**
 - procédure `recSuccesseurs(gr : Graphe, s : Element, ls : Liste de Element (S))`
 - procédure `recPredecesseurs(gr : Graphe, s : Element, lp : Liste de Element (S))`



Post-conditions des méthodes de base

- procédure `creerGraphe(gr : Graphe de Element (S))`
`gr` est initialisé et est un graphe vide
- procédure `ajouterSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)`
`e` est un sommet isolé du graphe `gr`
- procédure `ajouterArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)`
`a` est une nouvelle arête du graphe `gr`
- procédure `supprimerSommet(gr : Graphe de Element (E/S), e : Element)`
`e` n'est plus sommet du graphe `gr` et toutes les arêtes contenant `e` comme origine ou destination sont supprimées
- procédure `supprimerArete(gr : Graphe de Element (E/S), a : Arete)`
`a` n'est plus une arête du graphe `gr`
- fonction `recNbSommets(gr : Graphe de Element) : Entier`
`recNbAretes` vaut le nombre de sommets du graphe `gr`
- fonction `recNbAretes(gr : Graphe) : Entier`
`recNbAretes` vaut le nombre de sommets du graphe `gr`



Post-conditions des méthodes de base

- procédure `recSommets`(`gr` : Graphe, `ls` : Liste de Element (S))
La liste `ls` contient les différents sommets du graphe `gr`
- procédure `recAretes`(`gr` : Graphe, `lar` : Liste de Arete (S))
La liste `lar` contient les différentes arêtes du graphe `gr`
- fonction `existeSommet`(`gr` : Graphe, `s` : Element) : Booleen
`existeSommet` renvoie vrai si `s` est un sommet du graphe `gr` et faux sinon
- fonction `existeArete`(`gr` : Graphe, `o` : Element, `d` : Element, `ar` : Arete (S)) : Booleen
`existeArete` vaut vrai si l'arête (`o,d`) appartient à `gr` et faux sinon. Si `existeArete` renvoie vrai alors `ar` est cette arête.
- procédure `recSuccesseurs`(`gr` : Graphe, `s` : Element, `ls` : Liste de Element (S))
`ls` contient les différentes destinations des arêtes dont l'origine est le sommet `s`
- procédure `recPredecesseurs`(`gr` : Graphe, `s` : Element, `lp` : Liste de Element (S))
`lp` contient les différentes origines des arêtes dont la destination est le sommet `s`



Le type Ensemble

- Dans de nombreux algorithmes de parcours de graphes, le concept d'ensemble semble plus approprié au concept de liste.
- Les méthodes du type Ensemble
 - procédure `creerEnsemble(ens : Ensemble de Element (S))`
 - fonction `choisirElement(ens : Ensemble de Element) : Element`
 - fonction `appartient(ens : Ensemble de Element, e : Element) : Booleen`
 - fonction `ajouter(ens : Ensemble de Element (E/S), e : Element)`
 - fonction `supprimer(ens : Ensemble de Element (E/S), e : Element)`
 - fonction `cardinal(ens : Ensemble de Element) : Entier`
 - fonction `estVide(ens : Ensemble de Element) : Booleen`

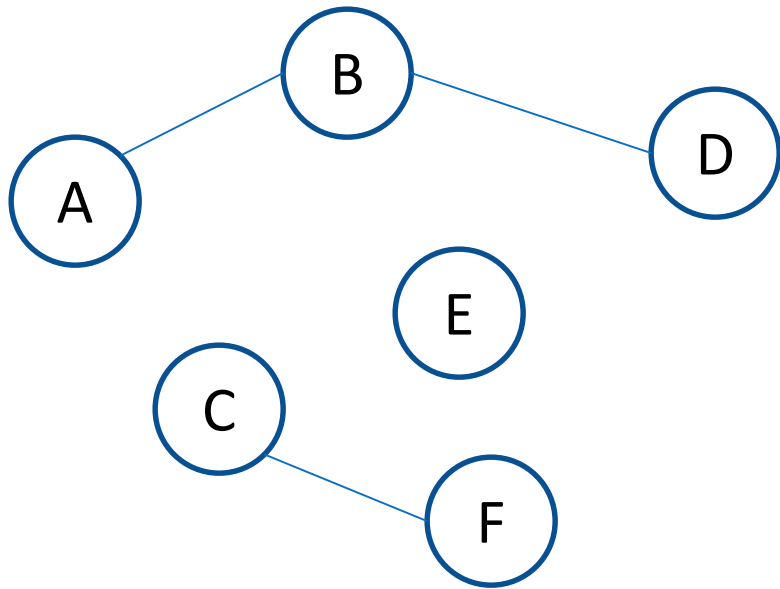


Composantes connexes

- Rappel : Dans un graphe non orienté, deux sommets sont dans la même composante connexe s'il existe une chaîne les reliant.
- Un algorithme pour chercher les composantes connexes
 - Créer une map dont la clé est un sommet du graphe et la valeur est un numéro de composante connexe
 - Remplir cette map avec tous les sommets du graphe et avec comme valeur un entier identifiant le sommet. Donc au début, il y a autant de composantes connexes que de sommets.
 - Pour chaque arête du graphe
 - Si les deux sommets ne sont pas dans la même composante (voir map) alors mettre à jour la map pour fusionner les deux composantes



Composantes connexes



A	B	C	D	E	F
1	2	3	4	5	6

Arête (A,B)

A	B	C	D	E	F
1	1	3	4	5	6

Arête (C,F)

A	B	C	D	E	F
1	1	3	4	5	3

Arête (B,D)

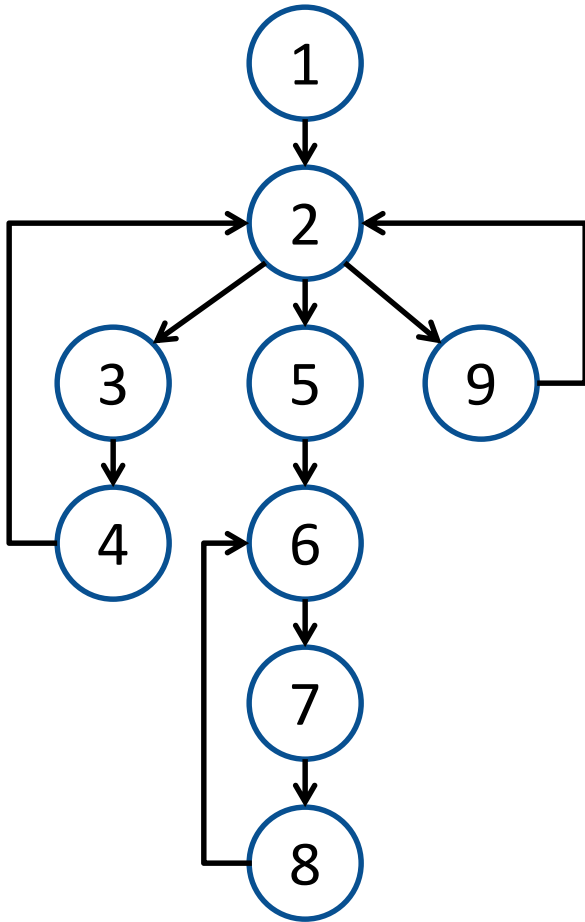
A	B	C	D	E	F
1	1	3	1	5	3

Composantes fortement connexes

- Rappel : Dans un graphe orienté, deux sommets s_1 et s_2 sont dans la même composante fortement connexe s'il existe un chemin reliant s_1 à s_2 et un chemin reliant s_2 à s_1 .
- Algorithme de Tarjan : Le principe général est de trouver des cycles à l'aide d'un parcours en profondeur et une pile qui mémorise à tout instant, l'ensemble des sommets des cycles



Composantes fortement connexes



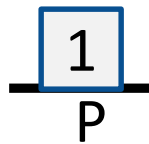
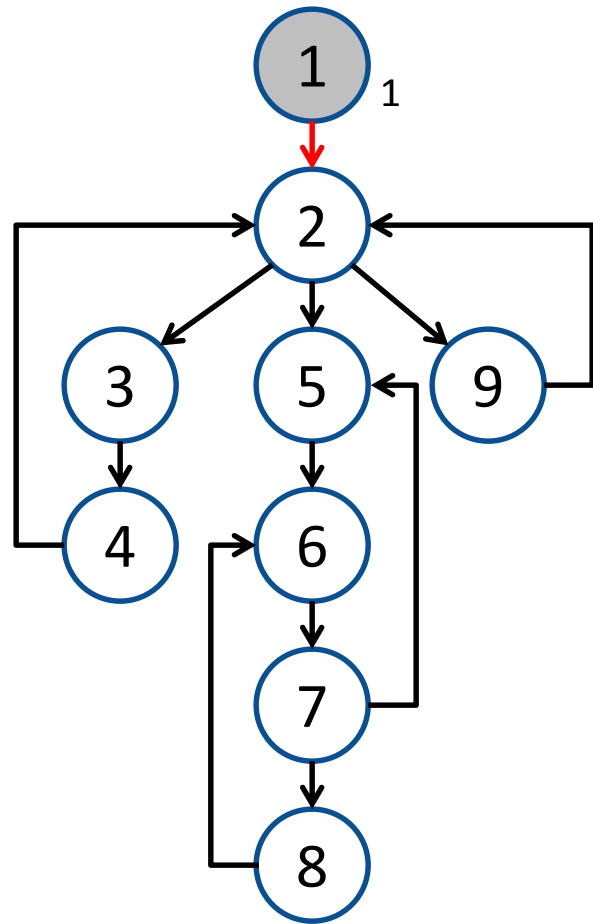
(vide)

P



Composantes fortement connexes

Tarjan(1)

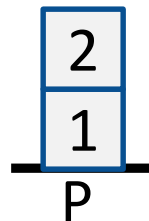
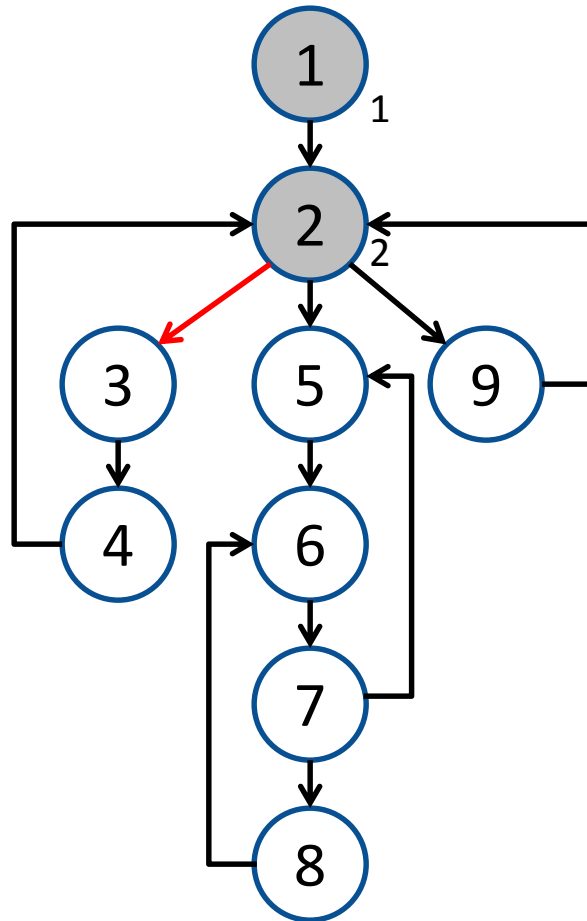


Les numéros en bas du sommet à droite indique un numéro de composante fortement connexe

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Composantes fortement connexes

Tarjan(2)



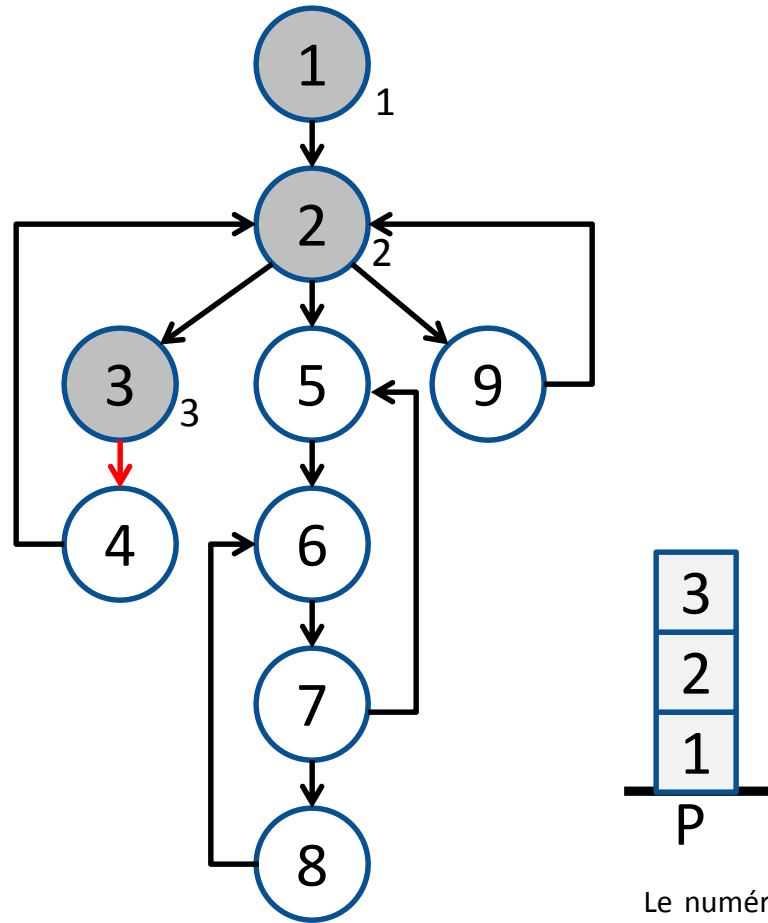
Les numéros en bas à droite des sommets indiquent un numéro de composante fortement connexe

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

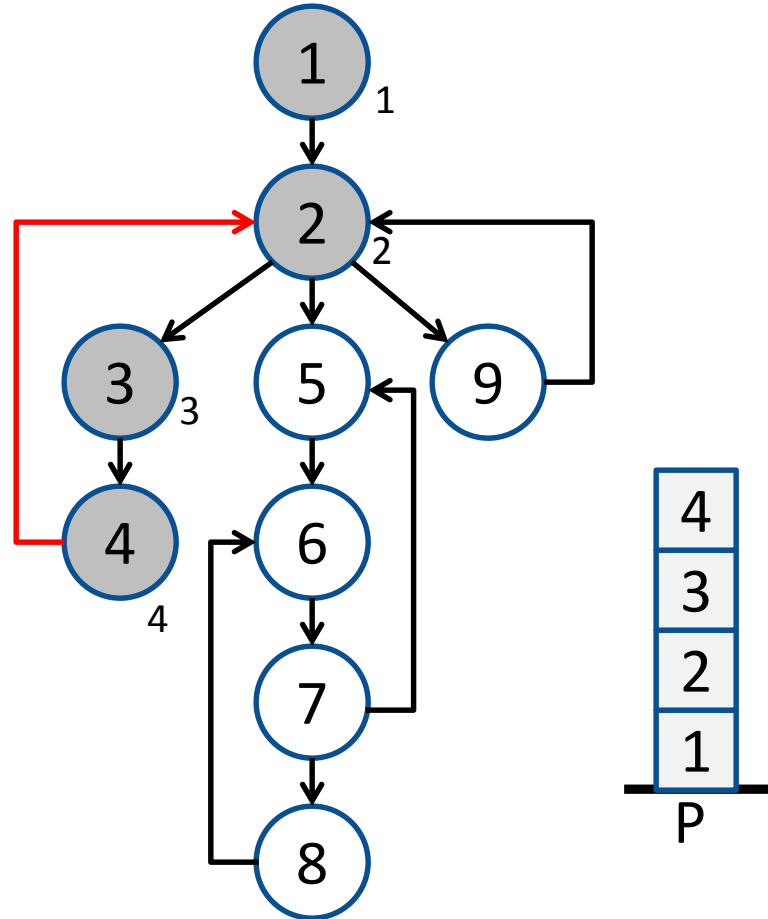
Tarjan(3)



Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe
 Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.
 Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(4)



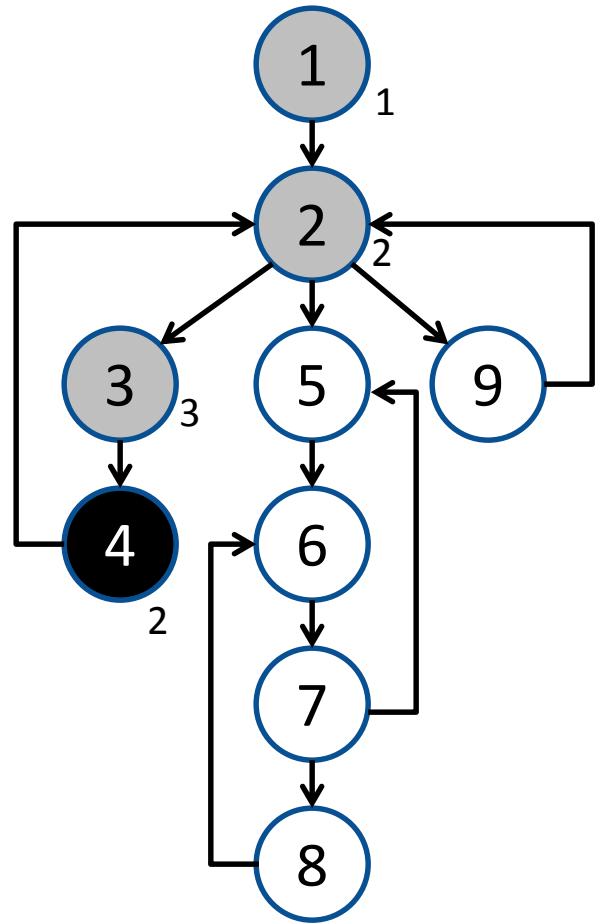
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

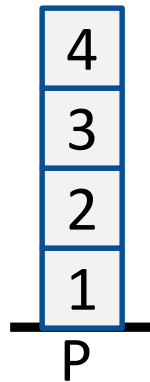
Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(4)



Tarjan(4) est terminé, il renvoie à Tarjan(3) son numéro : à savoir 2



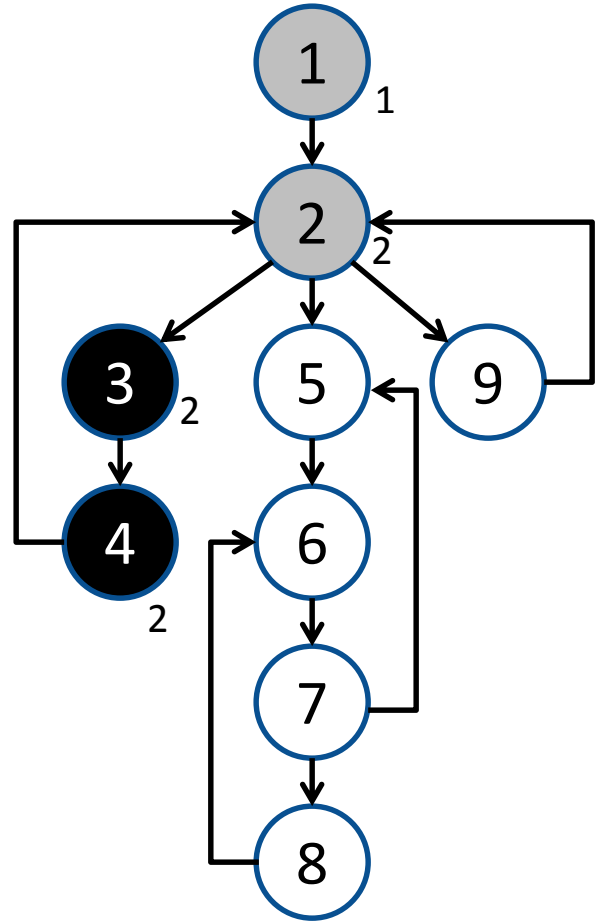
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

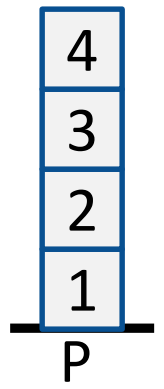
Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(3)



Tarjan(3) a récupéré le numéro 2 de l'appel de Tarjan(4). 2 est inférieur à l'actuel numéro 3, donc on met à jour son numéro pour préciser que le sommet 3 est dans le cycle contenant le sommet 2



Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

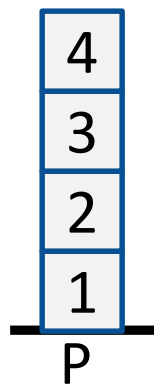
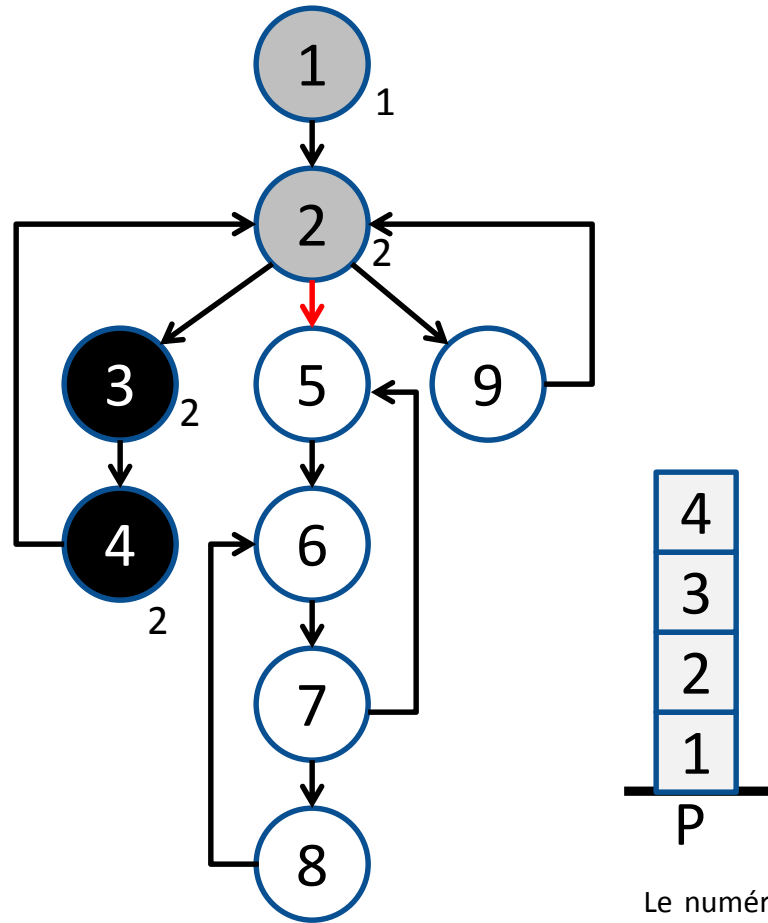
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.



Composantes fortement connexes

Tarjan(2)



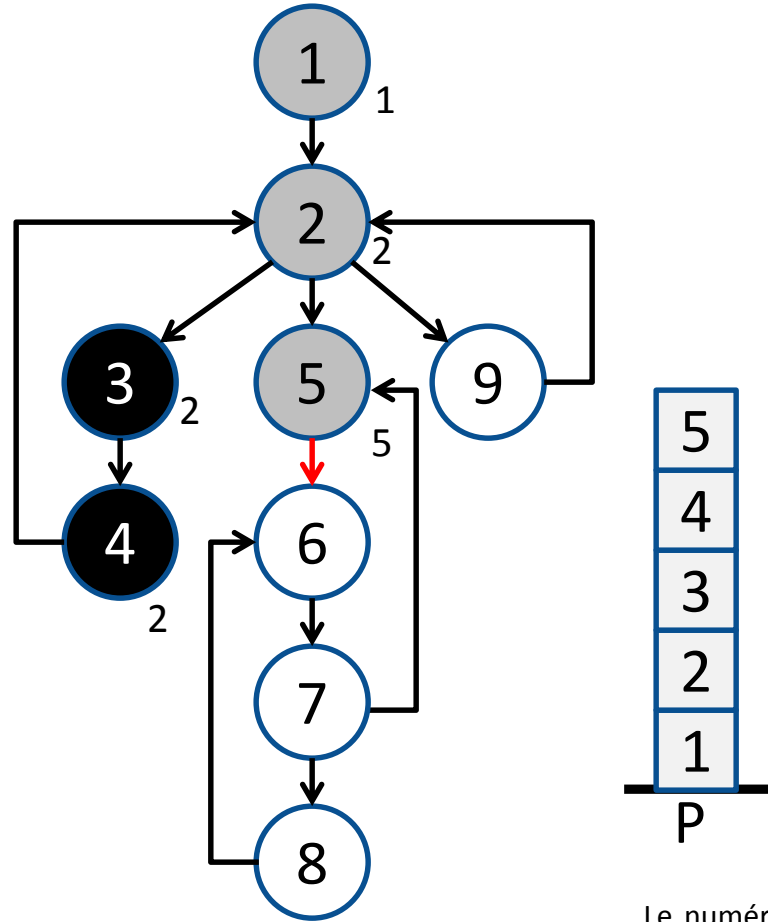
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(5)



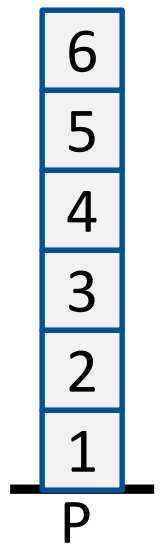
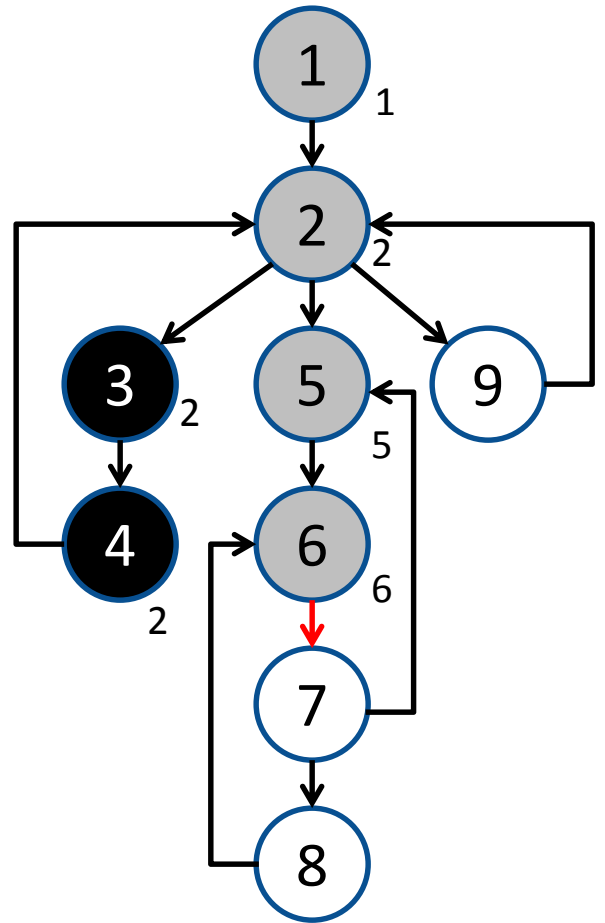
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(6)



Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

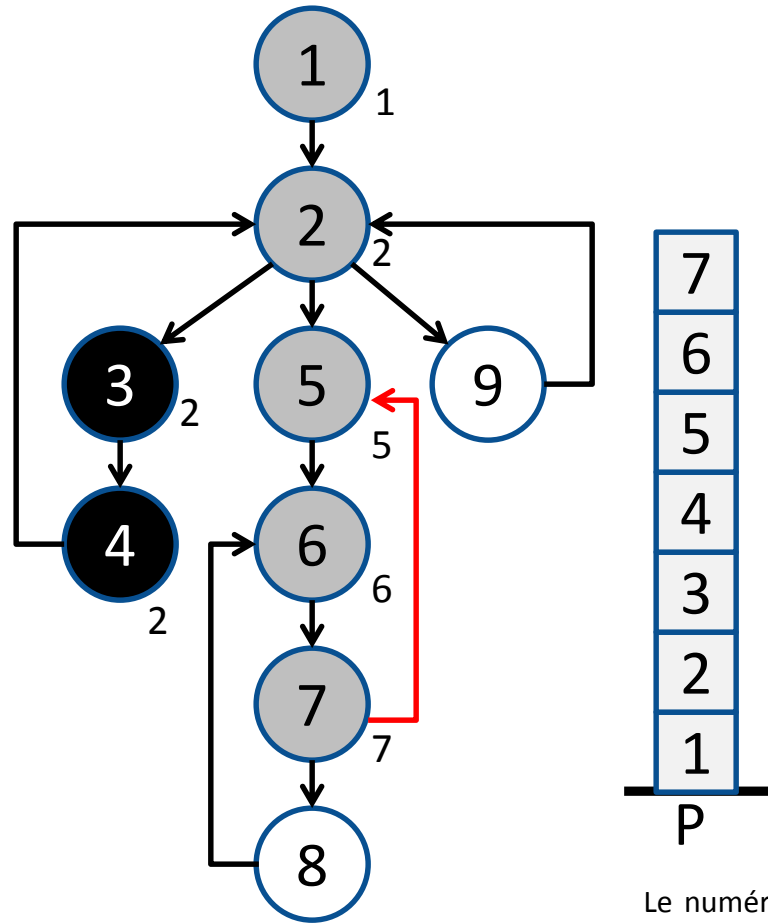
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.



Composantes fortement connexes

Tarjan(7)



Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

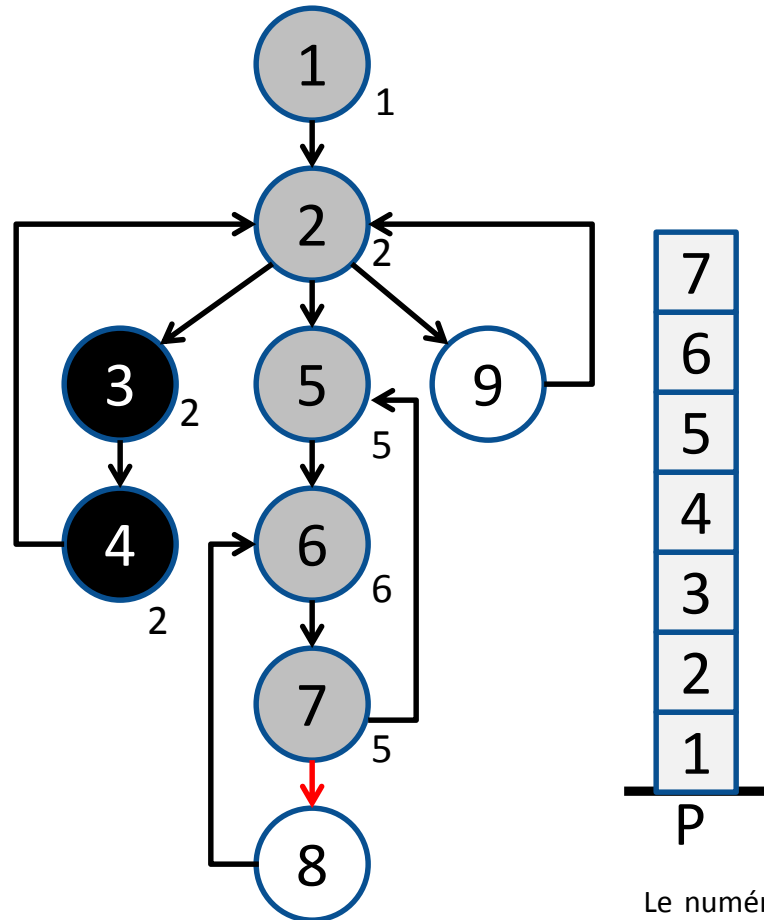
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.



Composantes fortement connexes

Tarjan(7)



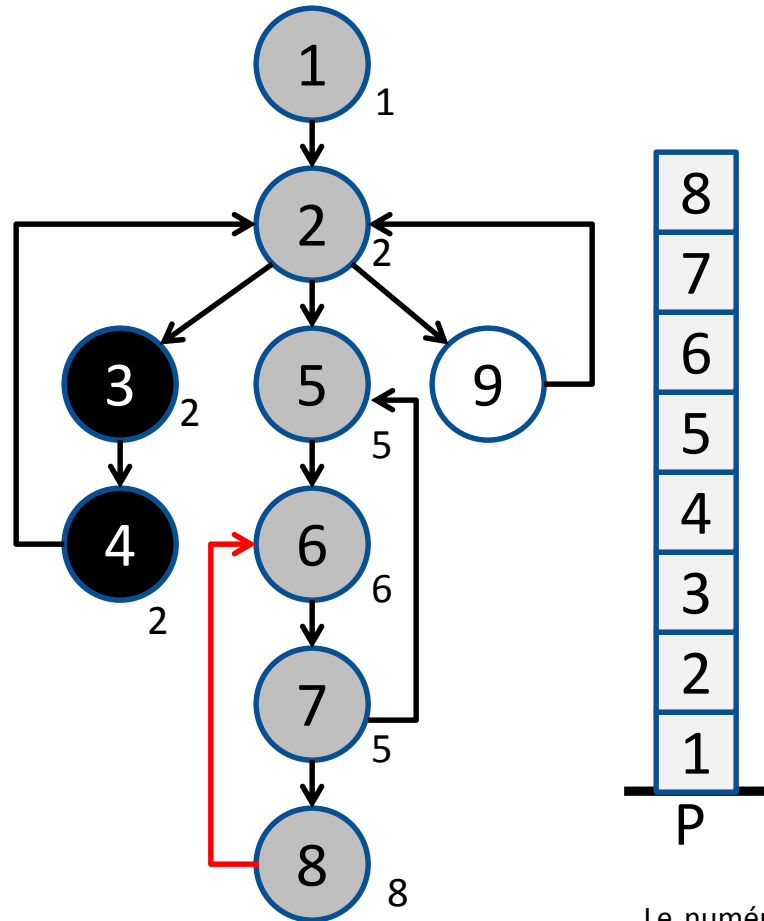
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(8)



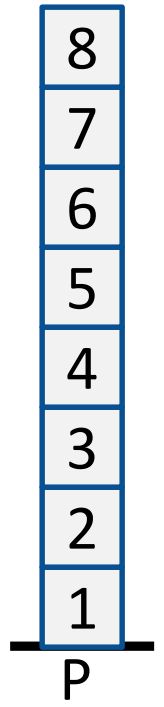
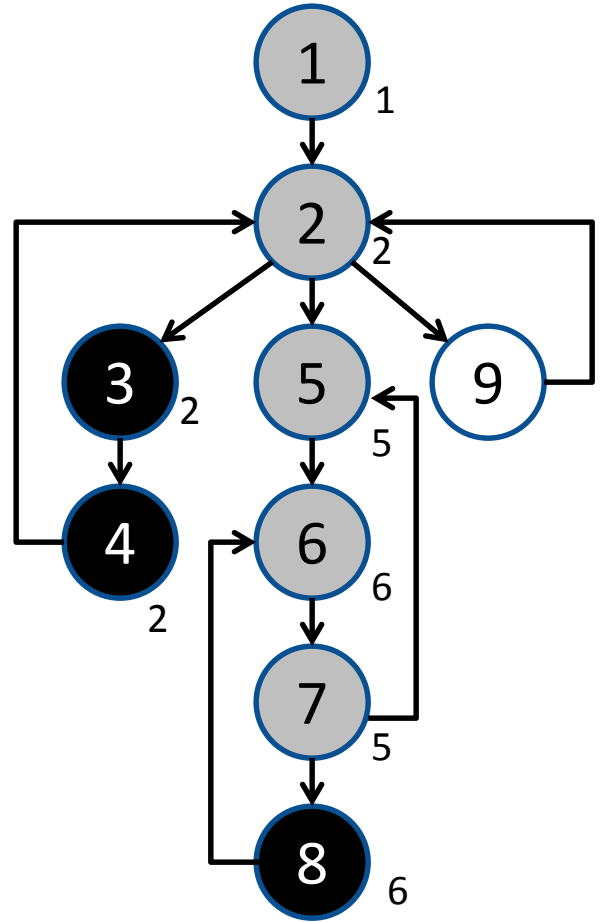
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(8)



Tarjan(8) est terminé. Il renvoie à Tarjan(7) le numéro de la composante connexe du sommet 7 : à savoir 6

Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

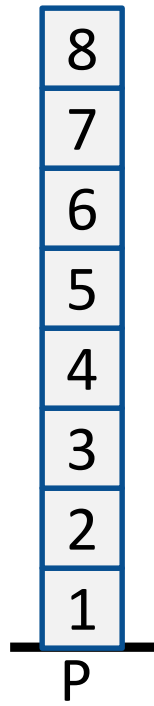
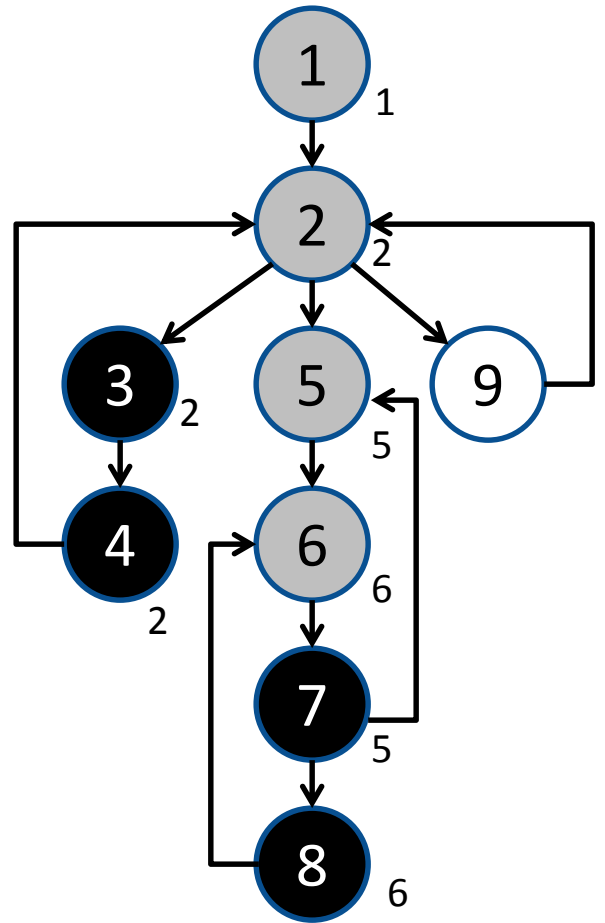
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.



Composantes fortement connexes

Tarjan(7)



Tarjan(7) récupère le retour de Tarjan(8) à savoir 6. Comme ce numéro de composante connexe est supérieur à celui du sommet 7, on ne change rien.

Tarjan(7) est terminé. Il renvoie à Tarjan(6) le numéro de composante connexe du sommet 7 : à savoir 5

Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

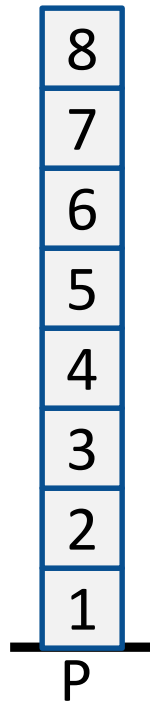
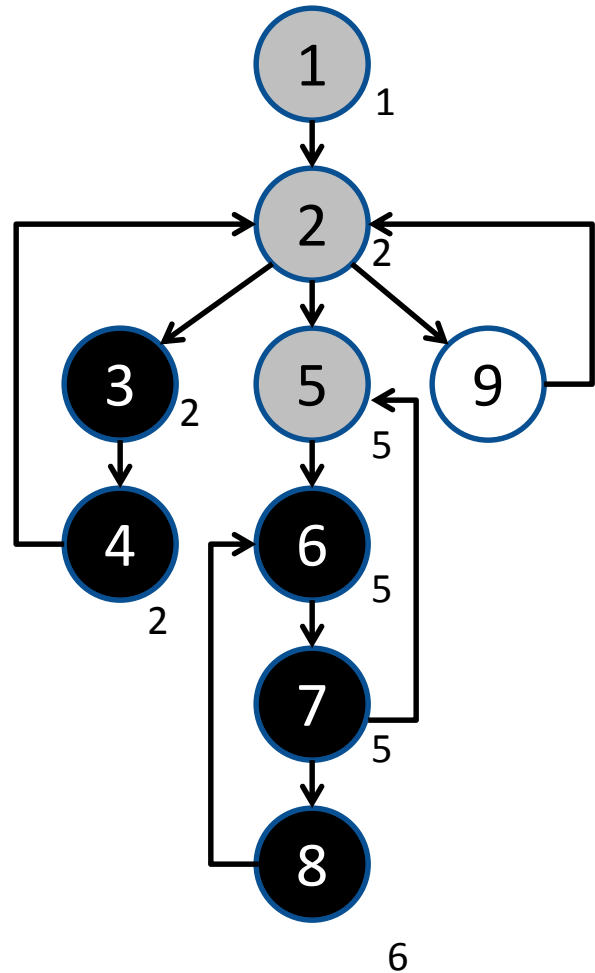
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.



Composantes fortement connexes

Tarjan(6)



Tarjan(6) a récupéré le numéro 5 de l'appel de Tarjan(7). 5 est inférieur à l'actuel numéro de composante du sommet 6, donc on met à jour son numéro de composante connexe pour préciser que le sommet 6 est dans le cycle contenant le sommet 5

Tarjan(6) est terminé. Il renvoie à Tarjan(5) le numéro de composante connexe du sommet 6 : à savoir 5

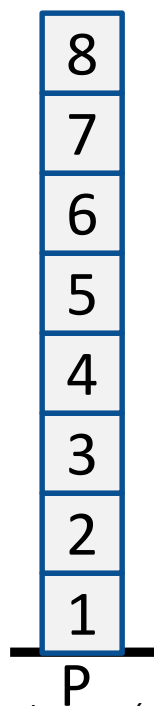
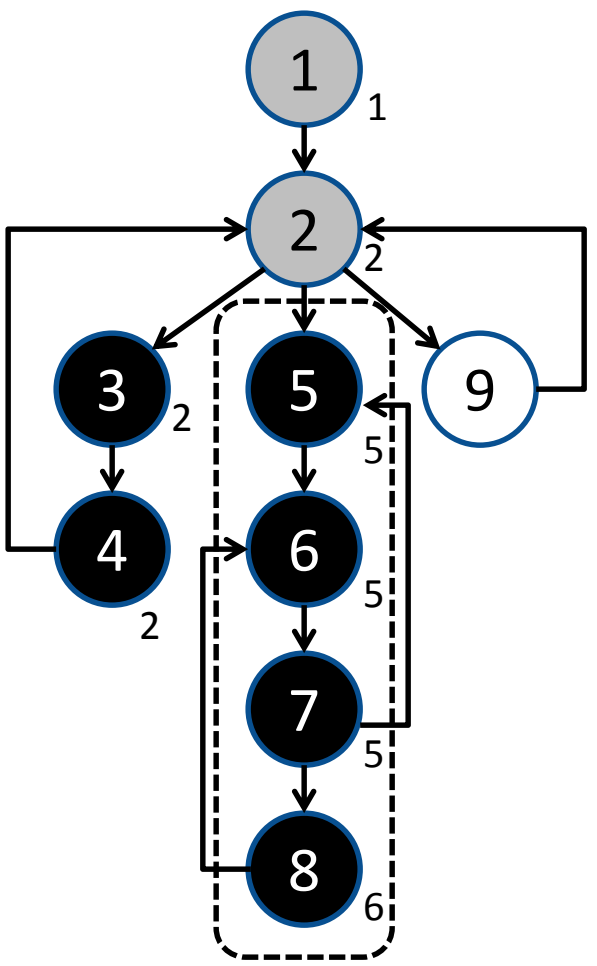
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(5)



Tarjan(5) a récupéré le numéro 5 de l'appel de Tarjan(6). On ne met pas à jour le numéro de composante connexe car il est déjà égal à 5.

Tarjan(5) est terminé et son numéro est égal à son ordre de visite (à savoir 5) dans le parcours en profondeur.

On va donc dépiler la pile jusqu'au sommet 5 pour trouver une première composante connexe.

On voit le résultat dans le prochain slide.

Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

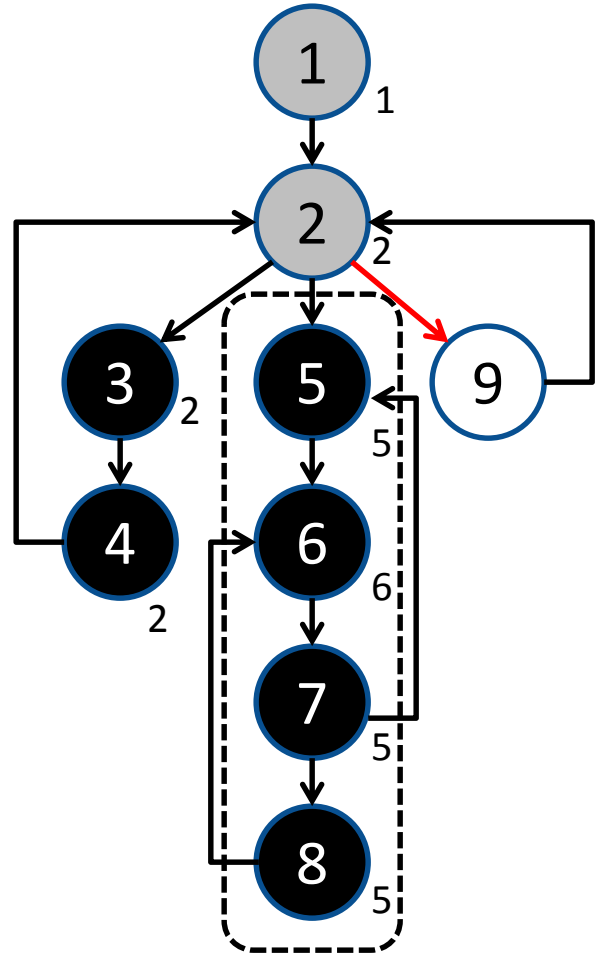
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

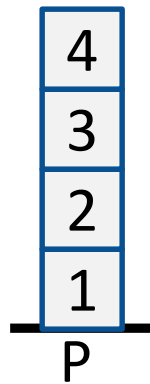


Composantes fortement connexes

Tarjan(2)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8



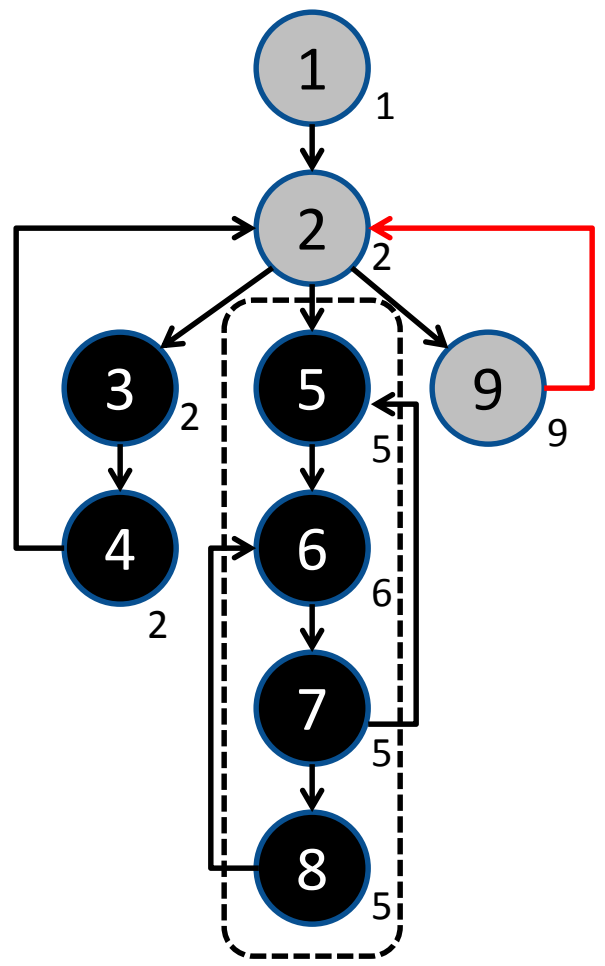
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

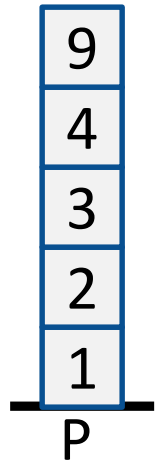
Composantes fortement connexes

Tarjan(9)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8.

Le sommet 9 est relié au sommet
par l'arc (2,9), on met donc à jour
le numéro de sa composante
connexe à celle du sommet 2 : à
savoir 2.



Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

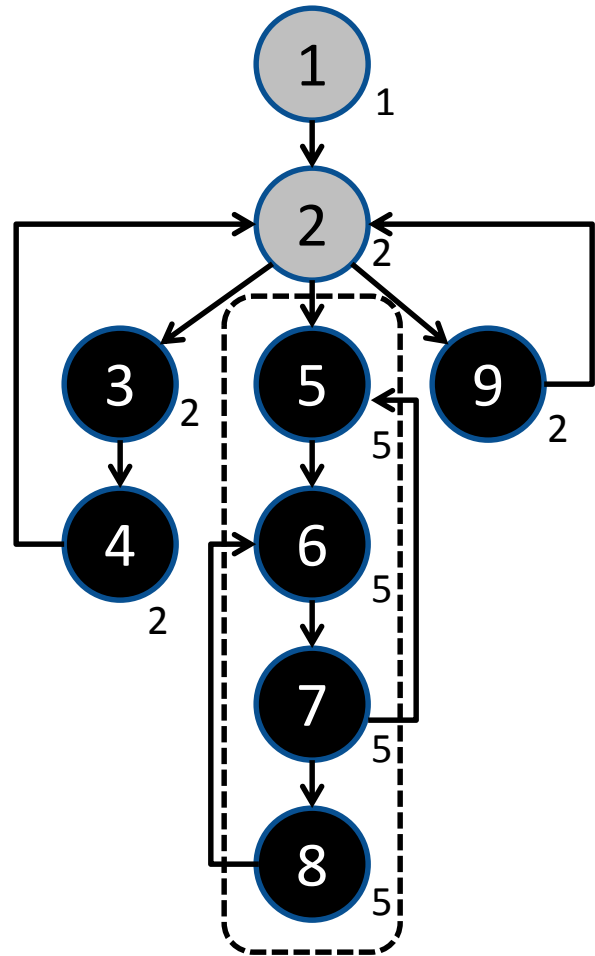
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

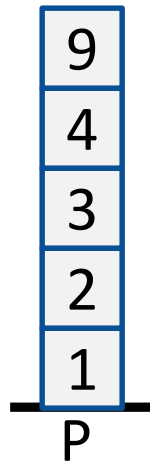


Composantes fortement connexes

Tarjan(9)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8



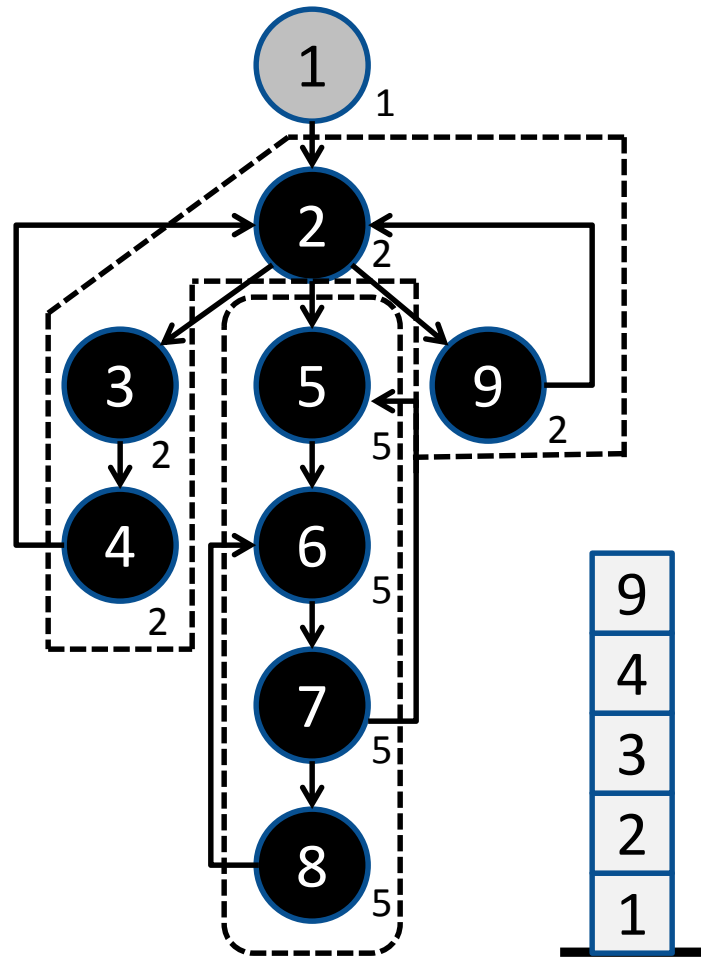
Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(2)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8

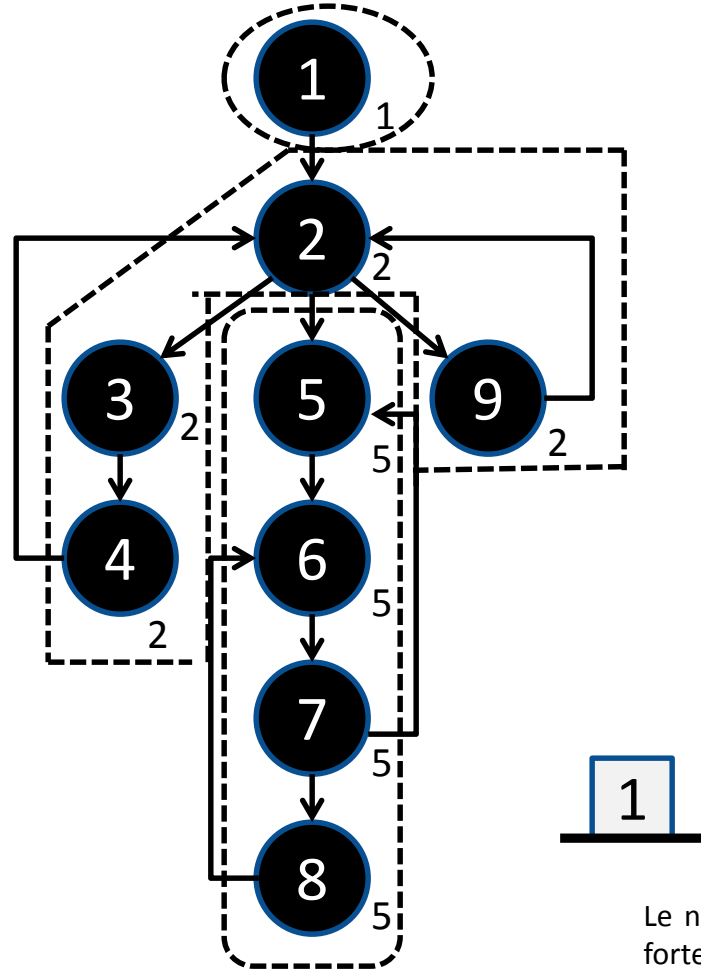
Tarjan(2) est terminé et son numéro est égal à son ordre de visite (à savoir 2) dans le parcours en profondeur.

On va donc dépiler la pile jusqu'au sommet 2 pour trouver une deuxième composante connexe.

On voit le résultat dans le prochain slide.

Composantes fortement connexes

Tarjan(1)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8

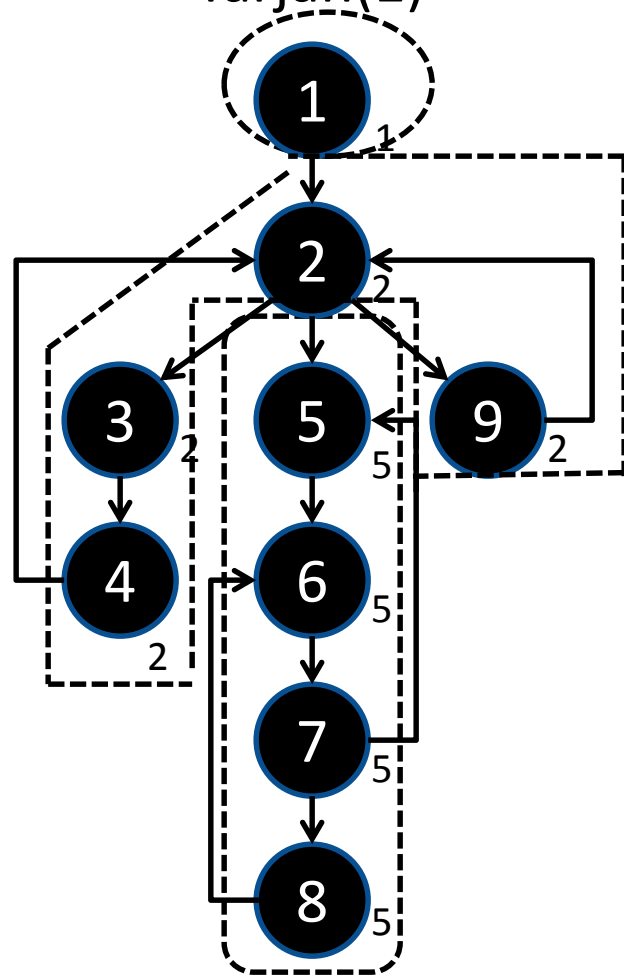
Une deuxième composante connexe
Les sommets 2, 3, 4 et 9

Tarjan(1) est terminé et son numéro est égal à son ordre de visite (à savoir 1) dans le parcours en profondeur.
On va donc dépiler la pile jusqu'au sommet 1 pour trouver une troisième composante connexe.
On voit le résultat dans le prochain slide.

Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.
Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.
Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.

Composantes fortement connexes

Tarjan(1)



Une première composante connexe
Les sommets 5, 6, 7 et 8

Une deuxième composante connexe
Les sommets 2, 3, 4 et 9

Une troisième composante connexe
Le sommet 1

Tarjan(1) est terminé.

L'algorithme est terminé

(vide)

P

Le numéro en bas à droite des sommets indique un numéro de composante fortement connexe.

Quand on arrive pour la première fois sur un sommet, le numéro de sa composante est initialisé au numéro du sommet.

Ce numéro est mis à jour dès qu'on trouve un arc reliant le sommet à un sommet dont le numéro de la composante est plus petit.