Résolution d'équations algébriques

Étude des suites

Problèmes posés

Le calcul par une méthode itérative d'un résultat revient à étudier une suite.

On distingue deux étapes dans l'étude des suites :

- Étude de la nature de la suite
- Recherche et calcul de sa limite éventuelle

Prenons par exemple la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$$

Mathématiquement, cette suite diverge mais en simple précision :

$$\forall n \geq 2097152 \quad S_n = 15.403682708740234375 00$$

⇒*L'ordinateur ne permettra que de calculer « vite » les termes d'une suite dont on connaît la nature*

Critère d'évaluation d'une méthode

L'efficacité d'une méthode dépendra de la vitesse de convergence de la suite correspondante.

Si on considère u_n une suite *convergeant* vers une limite a.
Il est possible de définir la suite v_n :

$$v_n = -log_{10}(|u_n - a|) \quad \text{c.à.d.} \quad |u_n - a| = 10^{-v_n}$$

Intuitivement v_n représente le nombre de décimales communes entre u_n et a.

On distinguera trois types de vitesses de convergence :

- logarithmique
- linéaire
- exponentielle

Vitesse de convergence logarithmique

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est logarithmique si la suite $\frac{v_n}{n}$ converge vers 0.*

Si u_n vérifie

$$|u_n - a| \sim \frac{K}{n^p} \quad \text{avec} \quad K > 0$$

alors v_n est équivalent à $p\log(n)$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de plus en plus important.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 1.644934067\ldots$$

En simple précision

$$\forall n \geq 4096 \quad S_n = \mathbf{1.644}725$$

Vitesse de convergence linéaire

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est linéaire si la suite $\frac{v_n}{n} \in [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{p^n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

on a $v_n \sim p \times n$.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations constant.

Par exemple :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{0,25^i}{i} = \ln(1,25) + O(0.25^n) \rightarrow .223143551314\ldots$$

En simple précision

$$\forall n \geq 12 \quad S_{12} = \mathbf{0.22314353}2872$$

Vitesse de convergence exponentielle

Définition *On dira que la vitesse de convergence de la suite u_n est exponentielle si la suite $\frac{v_n}{n}$ diverge.*

Si u_n vérifie

$$(u_n - a) \sim \frac{K}{A^{p^n}} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad p > 1$$

alors $v_n \sim \log(A) \times p^n$.
Si $p = 2$ on parlera de convergence quadratique.

Calculer une décimale supplémentaire nécessite un nombre d'itérations de moins en moins important.

Par exemple : $\left\{ \begin{array}{lcl} S_1 & = & 0.5 \\ S_n & = & S_{n-1} + S_{n-1} \times (1 - 3S_{n-1}) \end{array} \right.$

$$S_n \rightarrow \frac{1}{3}$$

En double précision

$$\forall n \geq 7 \quad S_7 = 0.33333333333333331483$$

Suites récurrentes

Définition *On appellera suites récurrentes les suites définies par un terme initial v_0 et la relation :*

$$v_{n+1} = f(v_n)$$

où f est une fonction réelle continue.

Si cette suite converge, elle converge vers un **point fixe** de f. C'est à dire un point a tel que :

$$f(a) = a$$

Définition (Limites possibles) *Un point fixe a est dit limite possible pour f si $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall v_0 \in V$ la suite v_n induite converge vers a.*

Fonctions contractantes

Définition (Fonction contractante) *Soit I un intervalle et soit f une application continue de I dans I, f est **contractante** si*

$$\exists k < 1 \text{ tel que}$$
$$\forall x, y \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x - y|$$

Ces fonctions sont intéressantes dans le cas où elle définissent une suite récurrente.

Théorème (du point fixe) *Si $f : I \to I$ est contractante alors f admet un unique point fixe $a \in I$ et toute suite définie par :*

$$\begin{cases} v_0 & \in & I \\ v_{n+1} & = & f(v_n) \end{cases}$$

converge vers a avec une convergence au moins linéaire

Par récurrence, on montre facilement que

$$|a - v_n| \leq k^n |a - v_0|$$

Fonctions dérivables

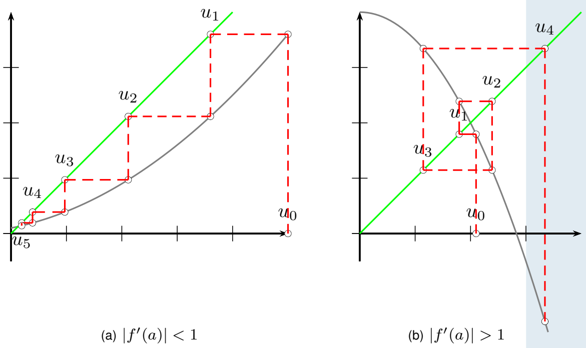
Pour prouver qu'une fonction est contractante, on peut utiliser sa dérivée.

Théorème *Soit $f : I \to I$ une fonction C^1 avec un point fixe a.*

- *Si $|f'(a)| < 1$ alors $\exists \mathcal{V}$ un voisinage de a dans lequel f est contractante et a est limite possible pour f.*
- *Si $|f'(a)| > 1$ alors f n'est contractante dans aucun voisinage de a. Alors a n'est pas limite possible pour f (sauf cas particulier).*

On peut même connaître la vitesse de convergence :

- si $f'(a) \neq 0$, la convergence est linéaire.
- si $f'(a) = 0$, la convergence est au moins quadratique.



(a) $|f'(a)| < 1$

(b) $|f'(a)| > 1$

FIGURE 1 –

Résolution d'équation

Introduction

on cherche a résoudre une équation de type

$$f(x) = 0$$

où f n'est pas forcément linéaire.

Il n'y a pas forcément de solution analytique (ex : racines des polynômes de degré > 5).

$\Longrightarrow$ *Il faut une méthode itérative*

Résolution de $f(x) = 0$

- Soit une fonction $f : R^n \to R^n$
  - continue sur ...
  - dérivable sur ...
  - C^n sur ...
- Principe :
  trouver une suite récurrente d'ordre 1 :

  $$u_{k+1} = g(u_k)$$

  qui converge vers la solution et telle que :
  - g est contractante
  - la solution est point fixe de g,

  $$f(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(r) = r$$

Résolution de $f(x) = 0$

Toute solution de l'équation $f(x) = 0$ sera point fixe de la fonction g avec

$$g(x) = f(x) + x$$

Si g est alors une fonction contractante sur un intervalle I, la suite

$$\begin{cases} v_0 & \in & I \\ v_{n+1} & = & g(v_n) \end{cases}$$

convergera vers une solution.

Mais la fonction g définie de cette façon n'est pas forcément contractante.

Résolution de $f(x) = 0$ (suite)

On peut trouver un grand nombre de fonctions permettant de résoudre le problème.
Par exemple :
Résoudre $x^2 - x = 0$, peut être résolu avec :

- $g(x) = x^2$: v_n tend vers 0 avec $v_0 = 0,8$ et diverge avec $v_0 = 1,2$
- $g(x) = \sqrt{x}$: v_n tend vers 1 avec $v_0 = 0,5$, de même avec $v_0 = 2$

On choisie g et v_0

- Dans le but
  - d'améliorer la convergence (linéaire ou quadratique)
  - de converger vers une autre solution quand il y en a plusieurs
- en fonction
  - des propriétés de f (dévirabilité, monotonie)
  - de la connaissance de f (peut-on calculer la dérivée ? Peut-on isoler les solutions ?)

Dichotomie

Méthode de dichotomie

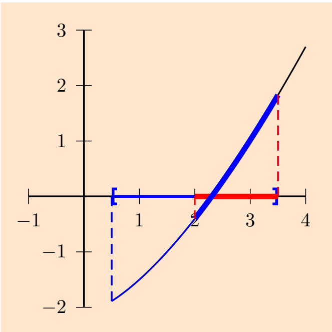
Conditions :

- $n = 1$ (*i.e.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
- f est continue
- f change de signe sur sa racine :
  Soient $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $\exists r \in [a, b] t.q. f(r) = 0$ et

$$\begin{cases} \forall x \in [a, r[& f(x) > 0 \\ \forall x \in]r, b] & f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \forall x \in [a, r[& f(x) < 0 \\ \forall x \in]r, b[& f(x) > 0 \end{cases}$$

Algorithme

Données : f, $a < b$.
début
  $c \leftarrow b$
  tant que $|f(c)| > \varepsilon$
  faire
    $c \leftarrow a + \frac{b+a}{2}$
    si $f(a)f(c) < 0$
    alors
      $b \leftarrow c$
    sinon
      $a \leftarrow c$
  Résultat : c
fin



- Quelle est la fonction g ?
- La racine est-elle point fixe ?
- g est-elle contractante ?

Étude de la méthode

- Il faut considérer la suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$,

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \\ I_{k+1} &= g(I_k) = \begin{cases} \left[\frac{b_k - a_k}{2}, b_k\right] & \text{ou} \\ \left[a_k, \frac{b_k - a_k}{2}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

- Le singleton $\{r\}$ est point fixe de la fonction
- g est contractante (trouvez la distance)
- La convergence est linéaire car

$$|b_k - a_k| = \frac{|b - a|}{2^k}$$

- ! Il faut bien choisir ε
- la méthode ne fonctionne pas en dimension $n > 1$.

Méthode de NEWTON

Retour sur la méthode du point fixe

Principe :

- Trouver la fonction g telle que :

$$f(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(r) = r$$

- g doit avoir de bonnes propriétés de convergence
- g doit « améliorer » une approximation de r
  i.e. si x_k est proche de r, alors $x_{k+1} = g(x_k)$ doit être plus proche de r.
  ou encore g doit rajouter un terme correctif à x_k pour le rapprocher du résultat.

Exemple inversion d'un nombre

Si on connaît y et on cherche à calculer $\frac{1}{y}$,
on a déjà $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$.

- La bonne valeur pour g est $g(x_k) = x_k - \varepsilon$ mais comment connaître la valeur $-\varepsilon$?
- On sait que $x_k \times y = 1 + y\varepsilon$,
- Donc $-\varepsilon = \frac{1 - yx_k}{y}$ mais il faut diviser par y alors que l'on cherche $\frac{1}{y}$
- Comme x_k est proche de $\frac{1}{y}$, on peut multiplier par x_k au lieu de diviser par y :

$$g(x_k) = x_k + x_k(1 - yx_k)$$

- C'est la méthode de NEWTON.

Avec ce choix de g, si $x_k = \frac{1}{y} + \varepsilon$ alors :

$$\left| x_{k+1} - \frac{1}{y} \right| = y\varepsilon^2$$

la convergence est quadratique

Généralisation

On veut calculer r tel que $f(r) = 0$
on a déjà calculé $x_k = r + \varepsilon$.

- On se base sur le calcul de $f(x_k)$
- La formule de Taylor dit que :

$$f(r) = 0 \simeq f(x_k) - \varepsilon f'(x_k)$$

- Donc la fonction choisie est :

$$g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Conditions :

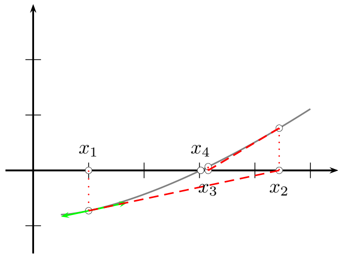
Pour assurer la convergence,

- f doit être C^2 (dérivable 2 fois et de dérivées continues).
- $f'(x_k)$ doit être $\neq 0$ pour tous k.
- La suite doit démarrer « au voisinage de r ».

Autre manière de voir

la méthode des tangentes :

- Si la fonction f est C^2, et $f'(r) \neq 0$ au voisinage de r elle se comporte comme une droite qui coupe l'axe des x.
- la formule $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ tente de résoudre l'équation comme si f était une droite :
  x_{n+1} est le point d'intersection entre la tangente à f en x_n et l'axe des x.



Algorithme

Données : x_0, NMAX et ε
début
$n \leftarrow 0$
répéter
$n \leftarrow n+1$
$x \leftarrow x_0$
$x_0 \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
jusqu'à *($|x - x_0| \leq \varepsilon$) ou ($n =$NMAX)*
Résultat : **si** *($n =$NMAX)* **alors**
écrire "Trop d'itérations"
rendre NaN
sinon
rendre x_0
fin

Conditions d'utilisation

Si $x_n = r + h$ Alors

$$x_{n+1} = r + h - \frac{f(r+h)}{f'(r+h)}$$

Par la formule de Taylor $\exists t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
0 = f(r) &= f(r+h) - hf'(r+h) + \frac{h^2}{2}f''(r+th) \\
\frac{f(r+h)}{f'(r+h)} &= h - \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \\
x_{n+1} &= r + \frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)} \\
|x_{n+1} - r| &= \left|\frac{h^2}{2}\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)}\right|
\end{aligned}$$

Conditions d'utilisation (suite)

Pour conclure, il suffit de voir que si f est C^2 et $f'(r) \neq 0$
$\exists \mathcal{V}$ voisinage de r et $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left|\frac{f''(r+th)}{f'(r+h)}\right| < K$$

en choisissant $x_0 \in \mathcal{V}$ et $|x_0 - r| < \frac{1}{2K}$ on montre par récurrence que :

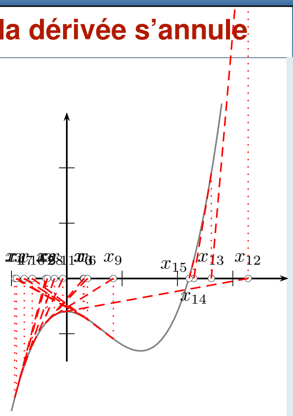
$$|x_n - r| < \frac{1}{2^{2^n}K}$$

Le point de départ doit être proche du résultat !

Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

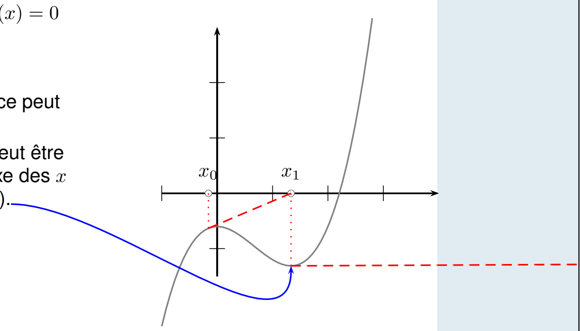
- La convergence peut être ralentie.



Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

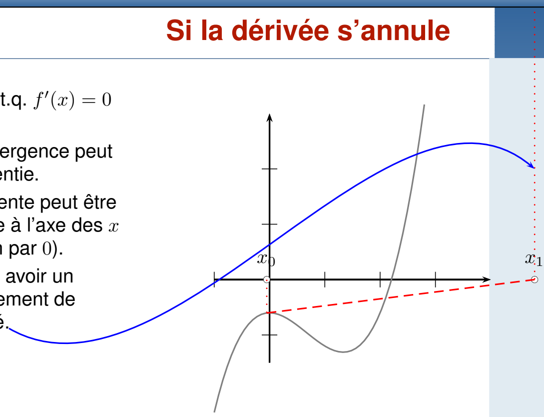
- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).



Si la dérivée s'annule

Si $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) = 0$

- La convergence peut être ralentie.
- La tangente peut être parallèle à l'axe des x (division par 0).
- Il peut y avoir un dépassement de capacité.



Propriété de l'algorithme

La convergence est très rapide : Si x_n est une approximation de r avec p chiffres significatifs *i.e.*

$$\|x_n - r\| \leq 2^{-p}$$

Alors x_{n+1} est une approximation de r avec environ $2p$ chiffres significatifs

$$\|x_{n+1} - r\| \leq 2^{-2p}$$

Cela reste vrai même s'il y a des erreurs d'arrondi dans le calcul de x_n.

- On peut dire que ces méthodes corrigent leurs propres erreurs d'arrondi.
- Dans le calcul de la suite (x_i), seul la dernière itération doit être faite avec toute la précision, les autres peuvent être faites avec moins de précision. $\Rightarrow$*plus rapidement*
- La division a la même complexité théorique que la multiplication

En dimension $n > 1$

En dimension $n > 1$

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\overrightarrow{x} \longmapsto (f_1(\overrightarrow{x}), \dots, f_n(\overrightarrow{x}))$

on utilise la matrice Jacobienne de f :

$$\bigtriangledown f(x). \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Méthode

Pour calculer r

- On choisit x_0 suffisamment proche de r.
- On construit le vecteur $f(x) = b$.
- On construit la matrice Jacobienne $A = \bigtriangledown f(x)$
- On résout le système $Ay = b$
- On pose $x_{k+1} = x_k - y$

Algorithme en dimension n

Données : x_0, NMAX et ε
début
  $n \leftarrow 0$
  répéter
    $n \leftarrow n + 1$
    $x \leftarrow x_0$
    $b \leftarrow f(x)$
    $A \leftarrow \bigtriangledown f(x)$
    résoudre $Ay = b$
    $x_0 \leftarrow x - y$
  jusqu'à *($\|x - x_0\| \leq \varepsilon$) ou ($n$ =NMAX)*
  Résultat : **si** *(n =NMAX)* **alors**
    échouer
  sinon
    rendre x_0
fin

Condition de convergence

Si

- $\exists \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$
- f est différentiable sur un voisinage $\mathcal{V}$ de a et $\forall x \in \mathcal{V}$
  $\| \bigtriangledown f(x) - \bigtriangledown f(a)\| \leq \alpha \|x - a\|$
- $\bigtriangledown f(a)$ inversible

alors $\exists \eta > 0$ t.q. si $\|x_0 - a\| < \eta$ la méthode de NEWTON converge vers a de façon quadratique.

- À chaque itération, il faut inverser la matrice $\bigtriangledown f(x)$
- Le point de départ doit toujours être au voisinage de la solution

Avantages et inconvénients

Avantages :

- Convergence très rapide.
- Très très rapide.

Inconvénients :

- La convergence n'est pas assurée.
- Il faut choisir un point de départ « au voisinage de la solution ».
  $\Rightarrow$Il faut connaître la fonction f
  (bug du pentium)
- Il faut calculer $f'(x)$.
- En dimension n, il faut inverser $\bigtriangledown f(x_n)$

Variantes de la méthode de NEWTON

- N'utiliser que la matrice $\bigtriangledown f(x_0)$. On peut alors préparer la matrice pour faciliter la résolution (décomposition PLU, voir cours précédent).
  - mêmes conditions d'utilisations
  - convergence linéaire
- Pour $n = 1$, méthode des sécantes :
  on approche la dérivée de f par
  $$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$
  - C'est une méthode récurrente d'ordre 2 :
  $$x_{n+1} \quad = \quad x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$
  - Pour une fonction f au moins C^3 telle que $f'(r) \neq 0$ la convergence est exponentielle mais non quadratique.
    $\Rightarrow$moins rapide que la méthode de NEWTON

Conclusion

- Plusieurs méthodes existent
  - Méthode de dichotomie,
    $+$ convergence assurée
    $-$ convergence linéaire
  - Méthode de NEWTON,
    $+$ convergence quadratique,
    $-$ non assurée, calcul des dérivées
  - Sécantes,
    $+$ convergence exponentielle sans calcul des dérivées
    $-$ moins rapide que Newton
  - Autres méthodes de point fixe,
    $-$ convergence linéaire
    $-$ choix de g