

Partiel – Electromagnétisme 2
CPI2
Commun à Cergy et Pau

Durée 2 heures.

Calculatrices interdites, documents interdits.

Les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

Document de trois pages.

Les opérateurs vectoriels et formules d'analyse vectorielle sont donnés à la page 4.

Questions de cours :

On considère un milieu de densité volumique de charge ρ et de densité volumique de courant \vec{j} .

1. Démontrer l'équation de conservation de la charge $\frac{d\rho}{dt} = -div\vec{j}$:

1.1 A partir du bilan de charge dans un volume élémentaire et par application du théorème d'Ostrogradsky.

1.2 A partir des équations de Maxwell.

2. Dans le cas des régimes permanents :

2.1 Démontrer l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel scalaire.

2.2 Démontrer l'équation de Poisson vérifiée par le potentiel vecteur : $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$, où $\Delta\vec{A}$ est le Laplacien du potentiel vecteur \vec{A} .

3. Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide.

4. Dans le cas de la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide, sans charges ni courants, démontrer l'équation de propagation du champ électrique \vec{E} et celle du champ magnétique \vec{B} , à partir des équations de Maxwell.

Exercice 1:

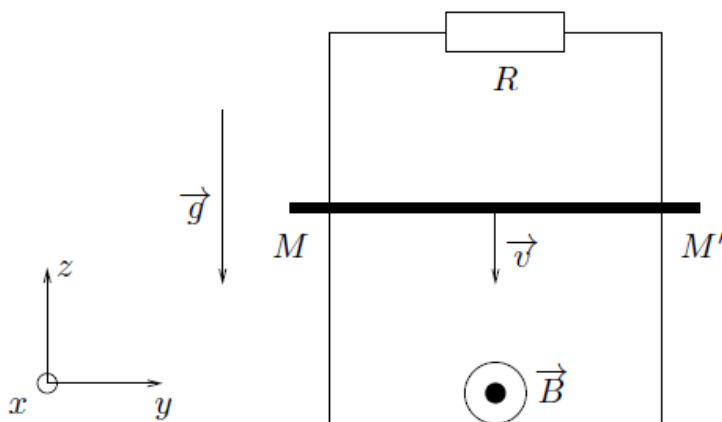
Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de l , glisse sans frottements une tige horizontale MM' , de masse m , grâce à deux contacts glissants M et M' . On négligera les résistances de la tige MM' et celle des rails.

L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme horizontal $\vec{B} = B\vec{u}_x$ (voir figure).

Les extrémités supérieures des rails sont reliés à une résistance R .

La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $i(t)$ l'intensité de courant induit dans le circuit et par $v(t)$ la vitesse de la tige.

- 1) Déterminer l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite dans la tige MM' , en fonction de $v(t)$, l et B .
- 2) Etablir l'équation électrique du montage.
- 3) Établir l'équation mécanique du dispositif.



- 4) Dédire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
- 5) Dédire de la question 4), la loi de variation du courant induit $i(t)$, en fonction du temps.
- 6) Dédire la loi de variation de $v(t)$.
- 7) Etablir l'expression de la puissance des forces de Laplace.
La comparer à la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance. Conclure.

Exercice 2

Une sphère de centre O de rayon R porte la charge Q uniformément répartie dans son volume, la densité volumique de charge ρ est constante. Soit $\vec{E}(M)$ le champ électrostatique qu'elle crée en tout point M de l'espace, à la distance r du centre O .

1. Montrer que le vecteur champ électrostatique s'exprime dans la base de coordonnées sphériques, en tout point M à la distance r du centre de la sphère sous la forme : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$.
2. Ecrire en coordonnées sphériques les équations locales auxquelles satisfait $\vec{E}(M)$ pour $r < R$ et $r > R$.
3. Les résoudre, puis achever la détermination de $\vec{E}(M)$ en utilisant les conditions aux limites (la continuité

de $\vec{E}(M)$ à la traversée de la sphère et la limite de $\vec{E}(M)$ à l'infini), on admet que le champ électrostatique au centre de la sphère est nul : $E(0)=0$.

4. Pour $r < R$ et $r > R$, écrire l'équation de Poisson satisfaite par $V(M)$ le potentiel électrostatique.

5. Intégrer cette équation puis déterminer $V(M)$, en utilisant les conditions de continuité en $r = R$ et en prenant, par convention $V = 0$ à l'infini.

On donne le potentiel électrostatique au centre de la sphère $V(0) = \rho \frac{R^2}{2\epsilon_0}$.

Expressions des opérateurs vectoriels et formules d'analyse vectorielle :

Soit la fonction scalaire f et les fonctions vectorielles \vec{A} et \vec{E}

Dans la base de coordonnées sphériques ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$)

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta E_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Dans La base de coordonnées cylindrique : ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$)

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{1}{r^2} (A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_r + \left(\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} (A_\theta - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta}) \right) \vec{u}_\theta + \Delta A_z \vec{u}_z$$

Théorème d'Ostrogradsky :

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{A} \cdot dV$$

janvier 2018