	Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année Contrôle continu CPI 1	
	Matière : **Mathématiques - Analyse**	*Date* : **Vendredi 15 mai 2020**
	Appareils électroniques et documents autorisés	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. -
Le détail de tous les calculs est exigé dans les questions suivantes :

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $f(x) = \ln(e^x + \cos(x))$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

Exercice 2. -
Soit n un entier ≥ 2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$$

1. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
   Indication : Penser à factoriser f'.
3. f possède-t-elle un extremum ? Justifier votre réponse.
4. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$

Exercice 3. -
Calculer les dérivées successives $f^{(n)}(x)$ de la fonction définie par $f(x) = (3x^2 - x)e^{2x}$, pour $n \geq 3$.

Exercice 4.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et qui vérifie : $\forall x \in [a,b],\ \ f(x) > 0$.
On pose $g(x) = \ln(f(x))$.
A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\exists c \in]a,b[,\ \ \frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Exercice 5. -
On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x + \sin(x)$

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.
2. Justifier que f est bijective et montrer que f^{-1} est dérivable.

   On admet que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^3$, et qu'elle possède donc un développement limité d'ordre 3 en 0 qui s'écrit : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$.
3. A l'aide de l'égalité $f^{-1}(f(x)) = x$, déterminer les coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3
   et écrire le $DL_3(0)$ de f^{-1}.