EISTI	**Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année** **Contrôle continu CPI 1**	
	Matière : **Mathématiques - Analyse**	*Date* : **Vendredi 19 juin 2020**
	Appareils électroniques et documents autorisés	*Durée* : **3 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

1 Exercice 1 :

Déterminer les primitives suivantes :

1. $F(x) = \displaystyle\int \cos^3(x)\sin^4(x)\,dx$
2. $G(x) = \displaystyle\int \frac{-2x^3-4x^2+9x+1}{x^2+2x-3}\,dx$

2 Exercice 2 :

Déterminer, éventuellement à l'aide d'intégrales, les limites des suites suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
2. $T_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(2+3\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

3 Exercice 3 :

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k : $\displaystyle\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\,dx.$
2. Montrer que : $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,dx.$

3. En déduire que : $u_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$
4. En encadrant la fonction : $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur $[0,1]$, montrer que :
$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \leq \frac{1}{n+1}$$
5. Quelle est alors la valeur de la limite : $\lim_{n \to +\infty} u_n$.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx$
7. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \ln(2) + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\, dx.$

4 Exercice 4 :

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$(E):\qquad y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2$$

1. Déterminer un réel a strictement positif tel que la fonction y_0, définie par $y_0(x) = ax$, soit une solution particulière de (E).
2. On pose : $y(x) = 3x - \frac{1}{z(x)}$ avec y solution de (E).
   Montrer que la fonction z est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1):\qquad z' + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z = 1$$

1. Déterminer la solution générale de l'équation homogène associée à (E_1).
2. Déterminer, à l'aide de la méthode de variation de la constante, une solution particulière de (E_1).
   Indication : Il peut être utile de connaître la dérivée de e^{3x^2}.
3. En déduire la solution générale de (E_1) puis celle de (E).

5 Exercice 5 :

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E)\qquad y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}(\pi - x)$$