EISTI	**Cycle préparatoire 1$^{\text{ère}}$ année** **Corrigé du DS 5 d'analyse**	
	Matière : **Mathématiques - Analyse**	*Date* : **Vendredi 15 mai 2020**
	Appareils électroniques et documents autorisés	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **3**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. -
Le détail de tous les calculs est exigé dans les questions suivantes :

1. $e^x+\cos(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+1-\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\;=2+x+o\left(x^2\right)$

   $\ln\left(e^x+\cos(x)\right)=\ln\left(2+x+o\left(x^2\right)\right)=\ln\left(2\left(1+\dfrac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right)\right)=\ln(2)+\ln\left(1+\dfrac{x}{2}+o\left(x^2\right)\right)$

   $\ln\left(e^x+\cos(x)\right)=\ln(2)+\ln(1+u)$ avec $u=\dfrac{x}{2}+o\left(x^2\right)$ et donc $u^2=\dfrac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)$

   $\ln\left(e^x+\cos(x)\right)=\ln(2)+u-\dfrac{u^2}{2}+o\left(u^2\right)=\ln(2)+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+o\left(x^2\right)$

2. $DL_2(1)$ de $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

   On pose $x=1+h$, $\quad f(x)=\dfrac{\ln(1+h)}{(1+h)^2}=\ln(1+h)\;(1+h)^{-2}$

   $\ln(1+h)\;=h-\dfrac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)$

   $(1+h)^{-2}\;=1-2h+\dfrac{-2(-2-1)}{2}h^2+o\left(h^2\right)\;=\;1-2h+3h^2+o\left(h^2\right)$

   $f(x)=\left(h-\dfrac{h^2}{2}+o\left(h^2\right)\right)\left(1-2h+3h^2+o\left(h^2\right)\right)=h-\dfrac{5}{2}h^2+o\left(h^2\right)$

   $f(x)=(x-1)-\dfrac{5}{2}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$

3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2(x)}=??$

   $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2(x)}=\dfrac{\sin^2(x)-x^2}{x^2\sin^2(x)}$.

   Comme le dénominateur est équivalent à x^4, on va faire un $DL_4(0)$ du numérateur :

   $\sin^2(x)=(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4))^2=x^2-2x\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)=x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$

   Donc : $\sin^2(x)-x^2=-\dfrac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$

$f(x) \sim \dfrac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = \dfrac{-1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2(x)} = \dfrac{-1}{3}$

Exercice 2. -

Soit n un entier ≥ 2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}$$

1. f est une fraction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^+$, donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
   $f'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(1+x)^n - (1+x^n)n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \dfrac{n(1+x)^{n-1}\left[x^{n-1}(1+x)-(1+x^n)\right]}{(1+x)^{2n}}$
   $f'(x) = \dfrac{n(1+x)^{n-1}\left(x^{n-1}-1\right)}{(1+x)^{2n}} = \dfrac{n\left(x^{n-1}-1\right)}{(1+x)^{n+1}}$
2. f' a le même signe que $x^{n-1}-1$, donc négative sur $[0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$.
   $f(0)=1$, $f(1) = \dfrac{2}{2^n} = 2^{-n+1}$ et $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	2^{-n+1}	$\nearrow$	1

3. f possède un maximum en 0, égal à 1, et un minimum en 1, égal à 2^{-n+1}.
4. On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \ f(x) \geq 2^{-n+1} \iff \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n} \geq 2^{-n+1} \iff (1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$

Exercice 3. -

$f(x) = (3x^2-x)e^{2x} = uv$ avec $u = 3x^2 - x$ et $v = e^{2x}$

$u' = 6x-1$, $u'' = 6$, $u^{(k)} = 0$ pour $k \geq 3$

$v' = 2e^{2x}$, $v'' = 4e^{2x}$, $v^{(k)} = 2^k e^{2x}$

On applique la formule de Leibniz pour $n \geq 3$:

$f^{(n)}(x) = (uv)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

$f^{(n)}(x) = \dbinom{n}{0} u^{(0)} v^{(n)} + \dbinom{n}{1} u' v^{(n-1)} + \dbinom{n}{2} u'' v^{(n-2)}$

$f^{(n)}(x) = 1\left(3x^2-x\right)2^n e^{2x} + n(6x-1)\,2^{n-1}e^{2x} + \dfrac{n(n-1)}{2}(6)\,2^{n-2}e^{2x}$

En regroupant et en factorisant, on obtient :

$f^{(n)}(x) = \left(12x^2 + (12n-4)x + 3n^2 - 5n\right)2^{n-2}e^{2x}$

Formule qui marche même pour $0 \leq n \leq 2$.

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et qui vérifie : $\forall x \in [a,b], \quad f(x) > 0$.
On pose $g(x) = \ln(f(x))$.
g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme composée de $f > 0$ et de ln.

De plus $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

On peut donc lui appliquer le théorème des accroissements finis, qui dit :
$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c) \iff \frac{\ln(f(b))-\ln(f(a))}{b-a} = \frac{f'(c)}{f(c)}$

$\iff \ln(f(b)) - \ln(f(a)) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)} \iff \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}$

Il suffit alors d'appliquer l'exponentielle pour obtenir le résultat :

$$\exists c \in]a,b[, \quad \frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right)$$

Exercice 5. -

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = 2x + \sin(x)$

1. $f(x) = 2x + \sin(x) = 2x + x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

   $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1 > 0$ car $\cos(x) \geq -1$.

   f est strictement croissante, donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   f' ne s'annule jamais, donc f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

   On admet que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^3$, et qu'elle possède donc un développement limité d'ordre 3 en 0 qui s'écrit : $f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)$.
3. $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

   et $f^{-1}(f(x)) = x$.

   $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, donc on peut composer les deux DL.

   $f^{-1}(f(x)) = a_0 + a_1\left(3x - \dfrac{x^3}{6}\right) + a_2\left(3x - \dfrac{x^3}{6}\right)^2 + a_3\left(3x - \dfrac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$

   $f^{-1}(f(x)) = a_0 + 3a_1 x - a_1\dfrac{x^3}{6} + a_2\left(9x^2\right) + a_3\left(27x^3\right) + o(x^3)$

   $f^{-1}(f(x)) = a_0 + 3a_1 x + 9a_2 x^2 + \left(27a_3 - \dfrac{a_1}{6}\right)x^3 + o(x^3) \ = \ x$

   L'unicité du DL de la fonction $x \mapsto x$ donne :

   $a_0 = a_2 = 0, \ 3a_1 = 1$ et $27a_3 - \dfrac{a_1}{6} = 0$, ce qui donne :

   $a_1 = \dfrac{1}{3}$, et $a_3 = \dfrac{1}{6 \times 27 \times 3} = \dfrac{1}{486}$

   Le $DL_3(o)$ de f^{-1} est donc le suivant :

   $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{486} + o\left(x^3\right)$