Corrigé - Examen de fin de semestre - Analyse - Janvier 2016.

Exercice I.

$(u_n)_n$ suite de réels bornée. $A_n = \{u_n, u_{n+1}, \dots\}$

1) (u_n) étant bornée, $\exists M \geq 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $y \in A_n$. $\exists p \geq n$ tq $y = u_p$, donc

$|y| = |u_p| \leq M$. Donc A_n est borné.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$y \in A_{n+1} \Rightarrow \exists\ p \geq n+1$ t.q. $y = u_p$

$\Rightarrow \exists\ p \geq n$ t.q. $y = u_p$ $\Rightarrow y \in A_n$. Donc $A_{n+1} \subset A_n$.

3) A_n étant une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$, elle possède une borne sup et une borne inf, et

$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow$ $\sup(A_{n+1}) \leq \sup(A_n)$ et $\inf(A_{n+1}) \geq \inf(A_n)$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \inf(A_n)$, $w_n = \sup(A_n)$

a) d'après 3), (v_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall y \in A_n$, $y \leq M$

$\Rightarrow \inf(A_n) \leq M \Rightarrow v_n \leq M$

donc (v_n) est majorée (par M).

b) d'après 3), (w_n) est décroissante, et minorée (par $-M$) (idem)

c) (v_n) étant croissante et majorée, elle converge.
(w_n) étant décroissante et minorée, elle converge.

5) $u_n = (-1)^n$.

$A_n = \{-1, 1\}$, $v_n = -1$ (suite constante), $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$

$w_n = 1$ (suite constante), $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$

Exercice II.

1) $$\frac{\tan x - \sin x}{\sin x\,(\cos 2x - \cos x)} = \frac{\tan x - \sin x}{\sin x\,(2\cos^2 x - \cos x - 1)}$$

$$= \frac{\tan x\,(1-\cos x)}{\sin x\,(\cos x - 1)(2\cos x + 1)} = \frac{-\tan x}{\sin x\,(2\cos x + 1)} \sim \frac{-1}{2\cos x + 1} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{-1}{3}}$$

2) $$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

3) $$\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow 1 - x < x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (1-x) \leq \lim_{x\to 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$$ (théorème des gendarmes).

4) $$\frac{e^x - e^2}{x^2 + x - 6} = \frac{e^2(e^{x-2} - 1)}{(x-2)(x+3)} \underset{2}{\sim} \frac{e^2(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{e^2}{x+3} \xrightarrow[x\to 2]{} \boxed{\frac{e^2}{5}}$$

Problème.

Première partie.

$f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1$

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 \right) = 2 - 1 = 1$

car $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$

donc f est prolongeable par continuité en 0, et son prolongement est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2) Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$:

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ parce que composé, quotient (avec dénominateur non nul) et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{(2x)^2}{2}}{x^2} = -2$$

(car $\ln(1+2x) - 2x \underset{0}{\sim} -\frac{(2x)^2}{2}$)

f est donc dérivable en 0, et $f'(0) = -2$.

4) $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$

a) $h'(x) = 1 - \left[\ln(1+x) + (1+x)\frac{1}{1+x} \right] = -\ln(1+x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

donc h est décroissante.

b) $h(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \ln(1+x) - x\ln(1+x)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x} - \ln(1+x)\right) = -\infty$$

Tableau de variations de h :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

donc $h(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

c) $$f'(x) = \frac{\frac{2}{1+2x}\cdot x - \ln(1+2x)}{x^2} = \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{(1+2x)\,x^2}$$

$$= \frac{h(2x)}{(1+2x)\,x^2}.$$

d) d'après c), f' prend le signe de h sur $\mathbb{R}_+$, donc $f'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et f est décroissante.

5) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x} - 1\right) = -1$$ (croissances comparées).

6) f étant continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$f(\mathbb{R}_+) = f([0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]-1,1].$$

7) sur $\mathbb{R}_+$, $f'(x) \leq 0$ (et ne s'annule qu'en 0), donc f est strictement décroissante. Étant continue, on déduit qu'elle est injective : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ injective.

Donc $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow f(\mathbb{R}_+) = \mathrm{Im}(f) =]-1,1]$ bijective.

8) Tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$1 \longrightarrow$	-1

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1 \longrightarrow$ pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists M > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$x \geq M \longrightarrow |f(x)+1| \leq \varepsilon$

Ainsi $-\frac{3}{2} \leq f(M) \leq -\frac{1}{2}$ donc $f(M) < 0$

- f est continue sur $[0,M]$
- $f(0) = 1 > 0$, $f(M) < 0$

par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur $[0,M]$,
$\exists \alpha \in [0,M]$ tq $f(\alpha) = 0$. α est unique car f est injective

9) $f(1) = \ln 3 - 1 \approx 0{,}1 > 0$
On applique le TVI sur $[1,M]$: $f(M) < 0 < f(1)$
$(M > 1$ car $f(M) < f(1))$
donc $\alpha > 1$ $(\alpha \in]1,M[)$.

Deuxième partie.

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1+2u_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$g(x) = \ln(1+2x)$

1) Récurrence sur n :

- pour $n=0$: $u_0 > 0$ ok
- Supposons $u_n > 0$:

$u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 1 \Rightarrow \ln(1+2u_n) > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$

donc $u_{n+1} > 0$.

2) On suppose $(u_n)_n$ convergente. Soit $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$, alors ℓ est un point fixe de g :

$g(\ell) = \ell \Rightarrow \ln(1+2\ell) = \ell$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $\frac{\ln(1+2\ell)}{\ell} = 1$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $f(\ell) = 0$

$\Rightarrow \ell = 0$ ou $\ell = \alpha$.

3) a) $g'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$ donc g est croissante.

Tableau de variations de g :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

b) g étant continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a.

$g(]0,\alpha]) =]g(0), g(\alpha)] =]0, \alpha]$

4) a) $u_0 \in]0,\alpha]$ et $]0,\alpha]$ est stable par g.

M.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,\alpha]$. Récurrence : $n=0$: $u_0 \in]0,\alpha]$ OK

si $u_n \in]0,\alpha]$

$u_{n+1} = g(u_n) \in g(]0,\alpha]) =]0,\alpha]$.

b) Sur $]0,\alpha]$, $f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\ln(1+2x) - x}{x} \geqslant 0$

$\Rightarrow \frac{g(x) - x}{x} \geqslant 0 \Rightarrow g(x) - x \geqslant 0$

c) g étant croissante, alors (u_n) est monotone,

$u_1 - u_0 = g(u_0) - u_0 \geqslant 0$ car $u_0 \in]0,\alpha]$, donc (u_n) croissante.

Étant majorée par α, elle converge vers $\boxed{\ell = \alpha}$ ou $\ell = 0$,

Mais $\ell = 0$ ne convient pas, car $\forall n > 0$, $u_n > u_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n \geqslant u_0 > 0$