

	Cycle préparatoire 1^{ère} année Contrôle continu CPI 1	
	<i>Matière : Mathématiques - Analyse</i>	<i>Date : Vendredi 25 novembre 2016</i>
	Appareils électroniques et documents interdits	<i>Durée : 2 heures</i>
		<i>Nombre de pages : 2</i>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. Définition de la limite

Déterminer, en revenant à la définition, les limites des suites suivantes.

On vous demande de trouver l'indice N à partir duquel vous avez :

$|u_n - l| < \epsilon$ ou bien $u_n > A$ ou bien $u_n < B$.

1. $u_n = \frac{n+3}{2n+1}$.

2. $v_n = \sqrt{3n^2 + 2n}$

Exercice 2. Etudes de suites

Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées séparément et dans le désordre.

1. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

Exprimez le terme général de cette suite en fonction de n puis calculez sa limite.

2. Déterminez, si elle existe, la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{5^n}{n!}$$

3. Déterminez, selon les valeurs de a et b , la limite éventuelle de la suite suivante :

$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}^{+*}.$$

4. La suite, définie par : $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, possède-t-elle une limite ?

Justifier rigoureusement votre réponse.

Exercice 3. Méthode d'Héron

L'algorithme de Héron est une méthode puissante pour obtenir une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre. On pense que Héron d'Alexandrie vivait au premier siècle de notre ère, mais ce n'est pas certain...

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right) \quad (1)$$

L'objet de cet exercice est de montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers \sqrt{a} .

1. Montrez que $u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$
2. En déduire que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$
3. Montrez que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge. Montrez que sa limite est \sqrt{a} .

Exercice 4. Irrationalité de e .

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

1. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On notera e leur limite commune.
2. Montrez que $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$
3. En raisonnant par l'absurde et en supposant que $e = \frac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ montrez que e est irrationnel.
Indication : On pourra considérer $n \cdot n!u_n$ et $n \cdot n!v_n$ pour arriver à une contradiction.