	Cycle préparatoire $1^{\text{ère}}$ année **Contrôle continu CPI 1**	
	Matière : **Mathématiques - Analyse**	*Date* : **Jeudi 4 juin 2020**
	Appareils électroniques et documents autorisés	*Durée* : **2 heures**
		Nombre de pages : **2**

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

L'ordre dans lequel les exercices sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. -
Le détail de tous les calculs est exigé dans les questions suivantes :

1. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de $f(x) = \sqrt{1+\ln(1+2x)}$.
2. Déterminer le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, de $g(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2x-\pi}$.
   Indication : $\cos(y+\pi) = -\cos(y)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x-1}+e^{-x+1}-2}{\ln^2(x)}$.

Exercice 2. -
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x^2\left[\ln(x+1) - \ln(x)\right]$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ (donner en particulier $f'(0)$).
3. Déterminer les réels a, b, c tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
4. En déduire que f possède une asymptote oblique en $+\infty$, donner l'équation, et préciser la position de la courbe de f par rapport à cette asymptote.

Exercice 3. -
Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$, par :

$$g(x) = (2x+1)e^{\frac{1}{x}}.$$

1. Justifier que g vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur tout segment de $]0,+\infty[$.

2. Appliquer ce théorème à g sur l'intervalle $[x; x+1]$ avec $x > 0$.
3. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left((2x+3)e^{\frac{1}{x+1}} - (2x+1)e^{\frac{1}{x}} \right).$$

Exercice 4. -
On considère la fonction h définie, sur $\mathbb{R}^+$, par :

$$h(x) = xe^x$$

1. Calculer l'expression de $h^{(n)}(x)$, dérivée énième de h pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Justifier que h est bijective et montrer que h^{-1} est dérivable.

   On admet que h^{-1} est de classe $\mathscr{C}^2$, et qu'elle possède donc un développement limité d'ordre 2 en 0 qui s'écrit : $h^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + +o(x^2)$.
3. A l'aide de l'égalité $h^{-1}(h(x)) = x$, déterminer les coefficients a_0, a_1 et a_2
   et écrire le $DL_2(0)$ de h^{-1}.