



Cycle préparatoire 1^{ère} année
Examen de fin du deuxième semestre

Abderrahim Bourhattas, Safaa El Sayed, Karam Fayad, Nisrine Fortin, Boris Picano-Nacci

<i>Matière : Analyse</i>	<i>Date : Jeudi 23 juin 2016</i>
Appareils électroniques et documents interdits	<i>Durée : 3 heures</i>
	<i>Nombre de pages : 2</i>

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.

Le sujet comporte cinq exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.

Exercice 1. On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{2t}{t^2 + t + 1}$.

- Déterminer le domaine de définition et de continuité de f .
- Soit I une primitive de f ; $I(t) = \int f(t) dt$.
 - Déterminer le domaine de définition de I .
 - Calculer $I(t)$.
- On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par son terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k}{k^2 + kn + n^2}.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(3) - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Indication : $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 2.

- Écrire le développement limité de $\sin(2x)$ et de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 3. En déduire le développement limité de $\tan(2x)$ en 0 à l'ordre 3.
- Déterminer le développement limité de $\ln(1 + \tan(2x))$ en 0 à l'ordre 3.
- Écrire le développement limité de $\arcsin(x)$ en 0 à l'ordre 3.
On rappelle que $\forall x \in]-1, 1[$, $(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-1/2}$.
- Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(2x)) + 2x(x - 1)}{\arcsin(x) - x}.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$(E) : (x^2 + 1)y' - xy = \sqrt{x^2 + 1}.$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle à préciser.
2. Trouver l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Exercice 4. Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)} dx.$$

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Calculer I_2 .
3. En effectuant le changement de variable $t = \sin x$, calculer I_1 .
4. Déterminer le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n.$$

Indice : On pourra remarquer que
$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} dx.$$

6. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Exercice 5. On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^∞ .
Pour $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation différentielle

$$(E_g) : y'' - 2y' + y = g(x).$$

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{S}_0 des solutions de

$$(E_0) : y'' - 2y' + y = 0.$$

2. Justifier que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de dimension finie du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer la dimension de \mathcal{S}_0 .
3. Résoudre l'équation (E_g) lorsque :
 - (a) $g(x) = e^x$.
 - (b) $g(x) = \sin x$.
 - (c) $g(x) = x + e^x$.