Corrigé DS2 (Analyse) 25-11-16

Exo 1 1° $u_n = \frac{n+3}{2n+1}$ a pour limite $\ell = \frac{1}{2}$, càd :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad |u_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0$, il faut trouver un rang N à partir duquel on a :

$$|u_n - \tfrac{1}{2}| < \varepsilon \iff \left|\frac{n+3}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

$$\iff \left|\frac{2n+6-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{5}{4n+2}\right| < \varepsilon \iff \frac{5}{4n+2} < \varepsilon$$

$$\iff 4n+2 > \frac{5}{\varepsilon} \iff 4n > \frac{5}{\varepsilon} - 2 \iff n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

On peut donc prendre $N = E\left(\frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right)$.

Ou bien comme $\frac{5}{4n+2} < \frac{5}{4n}$ on peut dire qu'il suffit

d'avoir $\frac{5}{4n} < \varepsilon \iff n > \frac{5}{4\varepsilon}$

et prendre $N = E\left(\frac{5}{4\varepsilon}\right) + 1$

2° $v_n = \sqrt{3n^2+2n}$ a pour limite $\ell = +\infty$, càd :

$\forall A \geq 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad v_n > A.$

Soit $A \geq 0$, il faut trouver $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel on a :

$$v_n > A \iff \sqrt{3n^2+2n} > A \iff 3n^2+2n > A$$

On $3n^2+2n > 3n^2$, il suffit donc d'avoir $3n^2 > A$

$$\iff n^2 > \frac{A}{3} \iff n > \sqrt{\frac{A}{3}}.$$

On peut donc prendre $N = E\left(\sqrt{\frac{A}{3}}\right) + 1$.

Exo 2

1°
$$\frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(n+u_n) = (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 = n+1+n+2\sqrt{n+1}\sqrt{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(n+u_n) = 2n+1+2\sqrt{n^2+n}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4u_n = 1+2\sqrt{n^2+n}-2n$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1+2\sqrt{n^2+n}-2n}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left[\sqrt{n^2+n}-n\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{4}+\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}\times\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{n}{n\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

$$\lim u_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Pour $n \geqslant 6$.

2°
$$u_n = \frac{5^n}{n!} = \frac{5\times5\times\dots\times5}{1\times2\times\dots\times n} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times\dots\times5}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times\dots\times n}$$

$$= \frac{5^5}{5!}\times\frac{5\times5\times\dots\times5}{6\times7\times\dots\times n} = \frac{5^5}{5!}\times\frac{5^{n-5}}{6\times7\times\dots\times n}$$

$$\leqslant \frac{5^5}{5!}\times\frac{5^{n-5}}{6\times6\times\dots\times6} = \frac{5^5}{5!}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$$

Donc $\quad 0 \leq u_n \leq \frac{5^5}{5!}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$

$\frac{5^5}{5!}$ est une constante. $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$ est 1 suite géométrique de raison $0<\left(\frac{5}{6}\right)<1$ donc de limite nulle.

THÉO. DES GENDARMES $\Longrightarrow$ $\lim u_n = 0$.

3° $a>0$, $b>0$, $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

VOIR TD : 2-1 Exo 9.

4° $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

* $u_{12n} = \cos\left(\frac{12n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{12n\pi}{3}\right) = \cos(4n\pi) - \sin(4n\pi)$

$u_{12n} = 1 - 0 = 1$.

* $u_{12n+1} = \cos\left(\frac{(12n+1)\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{(12n+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(4n\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(4n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$u_{12n+1} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède 2 suites extraites de limite différentes.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exo 3 $a>0$, $u_0>0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$.

1° $u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a$

$= \dfrac{u_n^4 + a^2 + 2u_n^2 a}{4u_n^2} - a = \dfrac{u_n^4 + a^2 + 2u_n^2 a - 4u_n^2 a}{4u_n^2}$

$= \dfrac{u_n^4 + a^2 - 2u_n^2 a}{4u_n^2} = \dfrac{(u_n^2 - a)^2}{(2u_n)^2}$

2° D'après la question précédente, on a : $u_{n+1}^2 - a \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc $u_{n+1}^2 \geq a$.

Comme $u_{n+1} \geq 0$ (par récurrence immédiate), on passe à la racine et on a : $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.

Donc $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a}$.

3° $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - u_n$

$$= \frac{u_n^2 + a - 2u_n^2}{2u_n} = \frac{u_n^2 - a}{2u_n}$$

Or $\forall n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow u_n^2 - a \geq 0$ et $u_n > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$.

4° $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par $\sqrt{a}$ à partir de $n=1$

Donc convergente.

Posons $l = \lim u_n > 0$, on a également $l = \lim u_{n+1}$

La relation de récurrence donne donc :

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Leftrightarrow l = \frac{l^2 + a}{2l}$$

$$\Leftrightarrow 2l^2 = l^2 + a$$

$$\Leftrightarrow l^2 = a$$

$$\Leftrightarrow l = \sqrt{a} \text{ ou } l = -\sqrt{a}$$

Comme $l > 0$, on a $\boxed{l = \sqrt{a}}$

Exo 4

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ $\quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$

1° **a)** $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

Donc $(u_n)_n$ strict^t croissante.

b) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{n.n!}\right)$

$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$

$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!}$

$= \frac{n^2+n+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$

$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$

Donc $(v_n)_n$ strict^t décroissante.

c) $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{1}{n.n!} = 0$

Donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites adjacentes.

2° Les 2 suites étant adjacentes, convergent vers la même limite : e.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n < e < v_n$

Car $(u_n)_n$ strict^t croissante et $(v_n)_n$ strict^t décroissante.

En multipliant par $n!$, on obtient :

$n!\,u_n < n!\,e < n!\,v_n = n!\left(u_n + \frac{1}{n.n!}\right)$

soit $n!\,u_n < n!\,e < n!\,u_n + \frac{1}{n}$

3° Supposons e rationnel, $\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}^*, e = \frac{m}{n}$

En multipliant l'encadrement précédent par n, on obtient :

$$n.n!\,u_n < n.n!\,e < n.n!\,u_n + 1.$$

$$n.n!\,u_n < n!\,m < n.n!\,u_n + 1$$

Or $n!\,u_n = n! \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{n} n(n-1)\ldots(k+1) \in \mathbb{N}$

est un entier naturel, car somme d'entier naturel.

Notons le : $p = n.n!\,u_n \in \mathbb{N}$, on a donc :

d'une part $n!\,m \in \mathbb{N}$ et d'autre part,

$$p < n!\,m < p+1$$

d'où la contradiction : Il n'y a pas d'entier compris strictement entre 2 entiers successifs.

Conclusion : $e \notin \mathbb{Q}$.