Corrigé DS 1 (Analyse) 20-10-17

Exo 1

$x, y \in \mathbb{R}^+$

1° $\sqrt{x+y}$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ sont positifs, donc on peut comparer leur carré.

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{x+y}\right)^2 = x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y-(x+y)$$
$$= 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$$

Donc $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x+y}\right)^2$

Par suite $\sqrt{x}+\sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}$.

2° Supposons $x \geq y$, alors $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$ et donc $|x-y| = x-y$, de même que $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{x}-\sqrt{y}$

On doit donc montrer que : $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$.

$\sqrt{x} = \sqrt{x-y+y} = \sqrt{(x-y)+y}$, donc d'après la question 1°,

$\sqrt{x} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$

D'où $\sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

Si $x<y$, il suffit d'échanger les rôles de x et y.

On obtient alors : $\sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$

Ce qui signifie : $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

3° $$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$$

Donc $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ et par suite $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

$\boxed{\text{Exo } 2}$ $n \geq 2$.

1°
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} (j-i) = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} j - \sum_{i=1}^{j-1} i \right)$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \left(j(j-1) - \frac{(j-1)j}{2} \right) = \sum_{j=2}^{n} \frac{j(j-1)}{2} = \sum_{j=2}^{n} \frac{j^2-j}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n} j = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \cancel{1} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{n(n+1)}{2} - \cancel{1} \right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12} (2n+1-3) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{12} = \frac{n(n+1)2(n-1)}{12} = \frac{n(n^2-1)}{6}.$$

2°
$$\prod_{k=0}^{n} \frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = \prod_{k=0}^{n} \frac{k^2+1}{(k+1)^2+1} = \text{produit télescopique}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2+1} = \frac{1}{n^2+2n+2}$$

Ou bien :
$$\prod_{k=0}^{n} \frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{10} \times \cdots \times \frac{n^2+1}{n^2+2n+2}$$

$$= \frac{0^2+1}{\cancel{1^2+1}} \times \frac{\cancel{1^2+1}}{\cancel{2^2+1}} \times \frac{\cancel{2^2+1}}{\cancel{3^2+1}} \times \cdots \times \frac{\cancel{n^2+1}}{(n+1)^2+1}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

Exo 3 (1) $z^3-(3+3i)z^2+(3+2i)z-(5+i)=0$

1° Si $z=-i$, alors $z^2=-1$ et $z^3=+i$, en remplaçant on obtient :

$$z^3-(3+3i)z^2+(3+2i)z-(5+i)$$
$$=i-(3+3i)(-1)+(3+2i)(-i)-(5+i)$$
$$=i+3+3i-3i+2-5-i$$
$$=0$$

Donc $z=-i$ est bien une solution particulière de (1).

2° $(z+i)(z^2+bz+c)=z^3+bz^2+cz+iz^2+ibz+ic$
$$=z^3+(b+i)z^2+(c+ib)z+ic.$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} b+i=-(3+3i) \\ c+ib=3+2i \\ -(5+i)=ic \end{cases} \iff \begin{cases} b=-3-4i \\ c=\dfrac{-5-i}{i}=-1+5i \end{cases}$$

Donc : $z^3-(3+3i)z^2+(3+2i)z-(5+i)=(z+i)\left(z^2-(3+4i)z+-1+5i\right)$

3° z solution de $(E) \iff z=-i$ ou $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(3+4i)^2-4(-1+5i)=9-16+24i+4-20i$$

$$\Delta=-3+4i$$

Cherchons une racine carrée de Δ, sous la forme $\delta=x+iy$.

On a alors $\delta^2=\Delta \iff \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \end{cases}$

En considérant le module, on obtient : $x^2+y^2=|\Delta|=5$.

D'où : $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-y^2=-3 \\ 2xy=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=4 \\ xy>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=\pm 2 \\ xy>0 \end{cases}$

On peut donc prendre : $\delta=1+2i$

Les 2 solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{(3+4i)-(1+2i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{(3+4i)+(1+2i)}{2} = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$$

L'ensemble solution de (1) est donc :

$$S = \{-i \ ; \ 1+i \ ; \ 2+3i\}.$$

$\boxed{\text{Exo 5}}$

1°
$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ix+iky} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ix} e^{iky}$$

$$= e^{ix}\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{iky} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{iy}\right)^k$$

$$= e^{ix}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(e^{iy}\right)^k . 1^{n-k} = e^{ix} \times \text{binôme de Newton.}$$

$$= e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n.$$

2°
$$e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n = ?$$

$$1+e^{iy} = e^{i\frac{y}{2}}\left[e^{-i\frac{y}{2}}+e^{i\frac{y}{2}}\right] = e^{i\frac{y}{2}} . 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

Donc : $e^{ix}\left(1+e^{iy}\right)^n = e^{ix}\left[e^{i\frac{y}{2}} . 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)\right]^n$

$$= 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) e^{ix} e^{in\frac{y}{2}}$$

$$= 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) e^{i\left(x+\frac{ny}{2}\right)} = r\, e^{i(x+\varphi)}$$

avec $\begin{cases} r = 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) \\ \varphi = \frac{ny}{2} \end{cases}$

3°

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(x+ky) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \operatorname{Re}\left(e^{i(x+ky)}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Re}\left(C_n^k e^{ix+iky}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ix+iky}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left[2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) e^{i\left(x+\frac{ny}{2}\right)}\right] = 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) \operatorname{Re}\left(e^{i\left(x+\frac{ny}{2}\right)}\right)$$

$$\underline{S_n = 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) \cos\left(x+\frac{ny}{2}\right)}$$

De la même manière, on déduit :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(x+ky) = \operatorname{Im}\left(2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) e^{i\left(x+\frac{ny}{2}\right)}\right)$$

$$T_n = 2^n \cos^n\left(\frac{y}{2}\right) \sin\left(x+\frac{ny}{2}\right)$$