



se transforme  
et devient



Département de Mathématiques  
Année universitaire 2019-2020

DS1 du 03/04/2020

Filière : **PREPA1 - Pau**

Matière : **Mathématiques Appliquées**

Durée : **2h**

Responsable : **BARRAU Nelly ; FORTIN Nisrine**

**En cas de problème informatique pendant l'épreuve** (connexion internet, ...) : le candidat devra impérativement contacter (avant la fin de l'épreuve/dépôt), l'un des numéros suivants et y déposer un message :

(+33)5 590 590 84 (Nisrine)      ou      (+33)5 590 590 96 (Nelly)

**La communication entre les candidats durant l'épreuve est strictement interdite.**

**En cas de copies ressemblantes/similaires/identiques/proches : les candidats seront soumis à une évaluation orale (notée).**

### CONSIGNES : Évaluation à distance

1. L'usage d'un ordinateur est autorisé et nécessaire :
  - récupération du sujet sur AREL,
  - scan/photo de votre copie : écrits et graphiques (**chaque feuille doit être numérotée / nombre total de feuilles**)
  - Chaque graphique doit être référencié par le numéro de la question et de l'exercice correspondant et doit être intitulé.
  - dépôt sur AREL : Archive intitulée Groupe-NOM-Prénom et contenant tous vos écrits ET vos graphiques.
2. L'usage des supports de cours et TD de mathématiques appliquées est autorisé.
3. L'usage de la calculatrice est autorisé.
4. Des feuilles à carreaux doivent être mises à votre disposition pour tracer vos graphiques. **Indiquer votre Nom et Prénom sur chacune d'entre elles, ainsi que le nombre de ces feuilles sur votre copie principale.**
5. Le barème est signalé à titre indicatif.
6. La **qualité de la rédaction** sera prise en compte dans la note. Les réponses devront être soigneusement justifiées.
7. Ce DS est composé de 5 exercices indépendants dont 4 sont obligatoires :
  - Les exercices 1, 2 et 3 sont obligatoires.
  - Un exercice à choisir parmi 2 **exercices choix** 1 et 2 est obligatoire.
  - En bonus, sera apprécié l'exercice choix supplémentaire **si et seulement si les 4 exercices obligatoires sont faits.**

**Exercice choix 1 (Modélisation – 3 points)**

La menuiserie "Bosda" fabrique trois modèles de tables : "La Marbre", "La Noyer" et "La Rustique". Le temps de fabrication et le matériel requis varient d'un modèle de table à l'autre. Chaque modèle a donc son coût de production propre et génère un profit particulier. Le modèle

- "La Marbre" requiert  $2\text{m}^2$  de bois en chêne et  $1\text{m}^2$  de marbre ; et nécessite un temps de fabrication de 3 heures,
- "La Noyer" requiert  $3\text{m}^2$  de bois en noyer pour 3 heures de fabrication,
- "La Rustique" nécessite l'utilisation de  $247\text{dm}^2$  de bois en noyer,  $330\text{dm}^2$  de bois en chêne et 4 heures de fabrication.

Les profits nets résultant de la vente d'une table sont respectivement de 506€, 260€ et 400€ pour "La Marbre", "La Noyer" et "La Rustique".

On dispose d'un stock de  $400\text{m}^2$  de bois en chêne,  $800\text{m}^2$  de bois en noyer et  $200\text{m}^2$  de marbre. Le temps cumulé de travail de l'usine ne peut pas dépasser 200 heures.

Le problème de la menuiserie est de définir le nombre de tables de chaque modèle, à fabriquer permettant de maximiser le profit total de la menuiserie.

En justifiant soigneusement votre raisonnement, écrire en termes mathématiques le problème de la menuiserie "Bosda".

**Exercice choix 2 (Modélisation et résolution – 3 points)**

Dans un centre de loisirs, un groupe de moniteurs se charge de la distribution de compotes de fruits et de barres chocolatées lors du goûter de 16 heures. Pour pouvoir satisfaire la demande, ils doivent disposer au minimum de 108 compotes de fruits et de 96 barres chocolatées.

Deux épiciers proposent pour le même prix, l'un le lot A comprenant 12 compotes de fruits et 8 barres chocolatées, l'autre le lot B composé de 9 compotes de fruits et 12 barres chocolatées.

1. Écrire en termes mathématiques les contraintes des moniteurs. (Justifier)
2. À l'aide de la méthode graphique, déterminer le nombre de lots A et le nombre de lots B qui doivent être achetés pour satisfaire la demande au moindre coût.

**Exercice 1 (Problème d'optimisation – 7 points)**

Considérons le problème suivant :  $(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } (-x + 3y) \\ 3x - 2y \leq 7 \\ -x + 4y \leq 9 \\ -2x + 3y \leq 6 \\ x \in \mathbb{R}^+; y \in \mathbb{R}^+ \end{array} \right.$

1. Le problème  $(\mathcal{P})$  est-il linéaire ? Justifier votre réponse.
2. Considérons les droites suivantes :  
 $(D_1) 3x - 2y = 7, \quad (D_2) -x + 4y = 9, \quad (D_3) -2x + 3y = 6, \quad (I_k) -x + 3y = k.$   
 Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , donner :  
 (a)  $\mathbf{u}_i$  un vecteur directeur de la droite  $(D_i)$ ,  
 (b)  $\mathbf{A}_i$  un point par lequel passe la droite  $(D_i)$ ,  
 (c)  $\mathbf{v}_k$  un vecteur directeur de  $(I_k)$ .
3. Sur une feuille de papier millimétrée ou une feuille petits carreaux, tracer graphiquement les droites  $(D_1), (D_2), (D_3)$ , les iso-bénéfices  $(I_4)$  et  $(I_{10})$ .
4. Sur votre graphique, identifier la zone de solutions admissibles de  $(\mathcal{P})$ .
5. Résoudre le problème  $(\mathcal{P})$  graphiquement et analytiquement.

### Exercice 2 (Offre et Demande – 7 points)

On considère le marché d'un bien de prix  $p_n$  à l'instant  $n$  pour lequel l'offre  $O_n$  et la demande  $D_n$  vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} D_n = -2p_n + 70, & n \in \mathbb{N} \\ O_n = \alpha p_{n-1} - 30, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

où  $\alpha$  est un réel strictement positif.

1. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et dans l'hypothèse d'un ajustement de l'offre  $O_n$  et la demande  $D_n$ , déterminer la relation qui lie le prix  $p_n$  (à l'instant  $n$ ) au prix  $p_{n-1}$  (à l'instant  $n - 1$ ).
2. Déterminer le prix d'équilibre  $\bar{p}$ .
3. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $w_n = p_n - \bar{p}$ . Montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{\alpha}{2}$ .
4. En déduire l'expression de  $w_n$  en fonction de  $w_0$  et de  $n$ .
5. En déduire que pour tout instant  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n = \left(-\frac{\alpha}{2}\right)^n (p_0 - \bar{p}) + \bar{p}$ .
6. On considère  $\alpha = 0,5$  et le prix initial  $p_0 = 70$ .
  - (a) Exprimer  $p_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (b) Sans tenir compte du temps et dans un repère orthonormé, tracer les droites représentant la demande  $D$  et l'offre  $O$  en abscisses et  $p$  en ordonnées.
  - (c) Représenter graphiquement les suites coordonnées  $(p_n, D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(p_n, O_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ . Commentez vos résultats.
  - (d) Représenter graphiquement le prix  $p_n$  en fonction de  $n$ . Commenter vos résultats.

### Exercice 3 (Revenu – 3 points)

On désigne par l'entier naturel  $n$  les instants et on considère le modèle macro-économique suivant :

- ↪ À chaque instant, le revenu national  $y$  est la somme de la consommation  $c$  au même instant et de l'investissement  $i$  au même instant ;
- ↪ À chaque instant, la consommation est proportionnelle au revenu national de l'instant précédent : le coefficient de proportionnalité  $\alpha$  est compris entre 0 et 1 (0 et 1 exclus) ;
- ↪ À chaque instant, l'investissement est proportionnel à l'accroissement du revenu national entre l'instant précédant l'instant précédent et l'instant précédent. On note  $\beta$  ce coefficient de proportionnalité.

1. Traduire mathématiquement ce modèle.
2. On fait l'hypothèse qu'on ne consomme pas plus que le revenu :  $c_n < y_n$  et que le revenu national est en croissance.
  - (a) Montrer que l'investissement à l'instant  $n$  est strictement positif.
  - (b) En déduire le signe du coefficient  $\beta$ .
3. On fait l'hypothèse de l'équilibre entre consommation et investissement au même instant. Déterminer la relation récurrente que vérifie le revenu national.

Fin. ♣