

- *Aucun document n'est autorisé, Aucun appareil électronique n'est autorisé.*
- *Des feuilles de papier millimétrés sont mises à votre disposition pour tracer vos graphiques. Indiquer votre Nom et Prénom sur chacune d'entre elles, et préciser le nombre de ces feuilles sur votre copie principale.*
- *Le barème est signalé à titre indicatif.*

Exercice 1 *Problème d'optimisation [5 points]*

Considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maximiser } 4x + 5y \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \leq 7 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right.$$

1. Représenter graphiquement les contraintes.
2. Résoudre le problème graphiquement et analytiquement.

Exercice 2 *Modélisation et optimisation [7 points]*

Un chocolatier souhaite produire pour Pâques deux oeufs très originaux : "l'oeuf Fleur" et "l'oeuf Girafoco".



Figurine de type "Œuf en fleur"



Figurine de type "Girafoco"

Le chocolatier dispose de deux ouvrières incomparables : Nisrine et Nelly.

En 1h de travail, Nisrine a la capacité de produire 10 oeufs Fleur et 4 oeufs Girafoco, pour une rémunération de 3€/h ; alors que Nelly peut faire 5 oeufs Fleur et 7 oeufs Girafoco, pour un salaire de 2€/h.

Enfin, la machine de production des oeufs ne peut fonctionner plus de 11h (sous peine que sa surchauffe fasse fondre le chocolat).

L'EISTI commande à cet artisan 50 oeufs de chaque type.

L'objectif du chocolatier est d'honorer la commande, tout en minimisant son coût de production.

1. Modéliser le problème précédent.
2. Représenter graphiquement les contraintes.
3. Résoudre le problème.
4. Résumer et traduire les résultats obtenus.

Tournez svp →

Exercice 3 *Offre et Demande [4 points]*

On considère un système d'offre et de demande défini par

$$\begin{cases} D_n = ap_n + b, & n \in \mathbb{N} \\ O_n = cp_{n-1} + d, & n \in \mathbb{N}^* \\ p_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

où $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R})^4$ vérifiant $a \neq c$.

D_n, O_n et p_n sont respectivement la demande, l'offre et le prix à l'instant n .

1. Sans tenir compte du temps n , exprimer le prix d'équilibre \bar{p} en fonction de a, b, c et d .
2. Exprimer le prix p_n en fonction du prix p_{n-1} . De quelle nature est la suite $(p_n)_n$?
3. Montrer que

$$p_n = \left(\frac{c}{a}\right)^n \left(p_0 - \frac{d-b}{a-c}\right) + \frac{d-b}{a-c}$$

[Indication : On s'aidera de la suite géométrique $(v_n)_n$ de raison $\frac{c}{a}$, définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = p_n - \frac{d-b}{a-c}$]

4. [Bonus +1pt] Discuter du comportement de $(p_n)_n$ en fonction de $\frac{c}{a}$.

Exercice 4 *Offre et Demande [4 points]*

On considère un système d'offre et de demande défini par

$$\begin{cases} D_n = -4p_n + 4, & n \in \mathbb{N} \\ O_n = 2p_{n-1} + 2, & n \in \mathbb{N}^* \\ p_0 = 1 \end{cases}$$

où D_n, O_n et p_n sont respectivement la demande, l'offre et le prix à l'instant n .

1. Calculer le prix d'équilibre \bar{p} .
2. Le prix converge-t-il vers \bar{p} ou non ?
3. Tracer les droites représentant D et O en abscisses et p en ordonnée ; ainsi que les suites $(D_n, p_n)_n$ et $(O_{n+1}, p_n)_n$ (expliciter vos calculs).
4. Commenter vos résultats.

Fin. ♣