

## Cycle préparatoire 1<sup>ère</sup> année

### Devoir surveillé n<sup>o</sup> 3

Nombre de pages : 3

Mathématiques appliquées

Durée : 2 heures

Date : 13 juin 2019

#### **Appareils électroniques et documents interdits.**

**Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.**

*Le sujet comporte deux exercices. L'ordre dans lequel ceux-ci sont traités n'est pas imposé.*

*Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler être une erreur d'énoncé, vous la signalerez sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*

◇ ◇

**EXERCICE 1 (Mesure de température – 8 points)** On considère un système composé d'un thermomètre plongé dans un liquide. On note  $\theta(t)$  la température indiquée par le thermomètre à l'instant  $t$ ,  $\theta_0$  la température initiale du thermomètre et  $\theta_\ell$  la température initiale du liquide. Toutes les températures sont exprimées en degré Kelvin.

### PARTIE 1.

Pour modéliser la température indiquée par le thermomètre, on propose l'équation suivante:

$$(E): \quad \tau \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = \theta_\ell$$

1. À propos de la modélisation :

- (a) Quelle est l'unité de la constante  $\tau$  ?
- (b) De quoi dépend cette constante ?
- (c) On considère que la température  $\theta_\ell$  du liquide est la même avant et après avoir plongé le thermomètre. Justifier cette hypothèse.

2. Résoudre l'équation différentielle (E) en précisant la condition initiale utilisée.

### PARTIE 2.

Partant du même montage expérimental que précédemment, nous allons maintenant pouvoir le modifier afin de changer le second membre de l'équation différentielle. Dans la suite, le second membre changera.

1. Supposons que  $f(t) = \theta_\ell + t$ .

(a) Proposer un montage expérimental permettant d'obtenir un second membre de cette forme.

(b) Résoudre l'équation différentielle:  $\tau \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = f(t)$ .

2. On considère maintenant le second membre  $f(t) = \theta_\ell e^{-t/\tau}$ . Résoudre cette équation différentielle sans déterminer la constante d'intégration.

**EXERCICE 2 (Résolution d'équations différentielles – 12 points)** On considère les deux équations

$$(E_1): \quad t^2 y'(t) + y(t) = 0, \quad (E_2): \quad y''(t) + 2\lambda y'(t) + \omega_0^2 y(t) = f(t).$$

1. Montrer que  $(E_1)$  et  $(E_2)$  sont linéaires.

2. Préciser l'ordre et la nature de  $(E_1)$  et  $(E_2)$ .

3. On note  $I_1 = ]-\infty, 0[$  et  $I_2 = ]0, +\infty[$ .

(a) En détaillant tous les calculs, montrer que la solution générale de  $(E_1)$  sur  $I_1$  est

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{1}{t}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

(b) Montrer que la solution générale de  $(E_1)$  sur  $I_2$  est exprimée par  $y(t) = C_2 e^{-\frac{1}{t}}$ ,  $C_2 \in \mathbb{R}$ .

(c) Calculer, si elles existent, les limites suivantes,  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$ .

(d) Montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t)$  si et seulement si  $C_1 = 0$ .

(e) Calculer  $y'(t)$  lorsque  $t \in I_1$  et  $y'(t)$  lorsque  $t \in I_2$ .

(f) Vérifier que  $\lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t)$ .

(g) En déduire que la solution générale de  $(E_1)$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ C_2 e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où  $C_2 \in \mathbb{R}$ .

4. Exprimer la solution homogène de  $(E_2)$  en fonction de  $\lambda$  et de  $\omega_0$ .

5. Supposons que  $\lambda = -1$ ,  $\omega_0 = 1$  et  $f(t) = e^t(1+t)$ . Résoudre  $(E_2)$  dans  $\mathbb{R}$ .