EISTI – Cycle préparatoire 2ème année

# Intégration & Probabilités – Devoir surveillé nº 1

Romain Dujol

Vendredi 13 mars 2020 – 2 heures

**Exercice 1.**

a. $f_1(t) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$, il vient par théorème d'équivalence que $f_1$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ puis $\boxed{f_1 \text{ n'est pas intégrable sur } ]0,+\infty[}$.

b. $t\,f_2(t) = t\,e^{-\sqrt{\ln t}} = e^{\ln t - \sqrt{\ln t}}$. Or $\ln t - \sqrt{\ln t} = \ln t\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\ln t}}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ln t$ : donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln t - \sqrt{\ln t} = +\infty$ puis $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,f_2(t) = +\infty$. D'après la règle « $t^\alpha f(t)$ », il vient que $\boxed{f_2 \text{ n'est pas intégrable sur } [1,+\infty[}$.

c. Soit $X \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors $\displaystyle\int_0^X (\tan t)\,\mathrm{d}t = \int_0^X \frac{\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \big[-\ln(\cos t)\big]_0^X = \ln(\cos X)$.

Comme $\lim\limits_{X\to\pi/2} \cos X = 0$, il vient que $\lim\limits_{X\to\pi/2} \ln(\cos X) = +\infty$.

On en conclut que $\boxed{f_3 \text{ n'est pas intégrable sur } [0,+\infty[}$.

d. $\phi : u \mapsto \arctan(u^2)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{u\to+\infty} \phi(u) = \dfrac{\pi}{2}^-$, d'où $\phi([0,+\infty[) = \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$f_4$ est définie et continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[ = \phi([0,+\infty[)$. Donc $f_4$ est intégrable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si $u \mapsto \sqrt{\tan(\arctan(u^2))}\cdot\dfrac{2u}{1+u^4} = \dfrac{2u^2}{1+u^4}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Or $\dfrac{2u}{1+u^4} \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{2u}{u^4} = \dfrac{2}{u^3}$. Comme $u \mapsto \dfrac{1}{u^3}$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, il vient par théorème d'équivalence que $u \mapsto \dfrac{2u}{1+u^4}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$.

On en conclut que $\boxed{f_4 \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[}$.

**Exercice 2.**

a. Soit $X \in [0,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_0^X f_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^X \frac{\arctan t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\arctan t)^2}{2}\right]_0^X = \frac{(\arctan X)^2}{2}$.

Comme $\lim\limits_{X\to+\infty} \arctan X = \dfrac{\pi}{2}$, on en conclut que $\boxed{f_1 \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[ \text{ et } \displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{8}}$.

b. Soit $X \in ]0,1]$. Alors $\displaystyle\int_X^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_X^1 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_X^1 = 2e^{-\sqrt{X}} - 2e$.

Comme $\lim\limits_{X\to 0^+} e^{-\sqrt{X}} = e^0 = 1$, il vient que $f_2$ est intégrable sur $]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t = 2 - 2e$.

Soit $X \in [1,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_1^X f_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^X \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-2e^{-\sqrt{t}}\right]_X^1 = 2e - 2e^{-\sqrt{X}}$.

Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-\sqrt{X}} = 0$, il vient que $f_2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t = 2e$.

On en conclut donc que $\boxed{f_2 \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[ \text{ et que } \displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(t)\,\mathrm{d}t = 2-2e+2e = 2}$.

c. $\phi : u \mapsto \ln u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$. De plus $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \phi(u) = +\infty$ d'où $\phi([1,+\infty[) = [0,+\infty[$.
$f_3$ est définie et continue sur $[0,+\infty[ = \phi([1,+\infty[)$. Donc $f_3$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $u \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(\ln u)} \cdot \dfrac{1}{u}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
Or $\dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(\ln u)} \cdot \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{1+\dfrac{e^{\ln u}+e^{-\ln u}}{2}} \cdot \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{1+\dfrac{u}{2}+\dfrac{1}{2u}} \cdot \dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{u^2+2u+1} = \dfrac{2}{(u+1)^2}$.
Soit $U \in [1,+\infty[$. Alors $\displaystyle\int_1^U \frac{1}{1+\mathrm{ch}(\ln u)}\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^U \frac{2}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{2}{u+1}\right]_1^U = 1 - \frac{2}{U+1}$.
Comme $\displaystyle\lim_{U\to+\infty} \frac{1}{U+1} = 0$, $u \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(\ln u)}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{ch}(\ln u)}\frac{\mathrm{d}u}{u} = 1$.
On conclut donc que $\boxed{f_3 \text{ est intégrable sur } [0,+\infty[ \text{ et } \displaystyle\int_0^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t = 1}$.

**Exercice 3.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{t^3+\sqrt{t}} \end{array}$. On distingue trois cas.

($\alpha < 2-\alpha$, i.e. $\alpha < 1$) Alors, par théorème d'équivalence :
- $f_\alpha(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2-\alpha}}$ : donc $f_\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\dfrac{1}{2} - \alpha < 1$, i.e. $\alpha > -\dfrac{1}{2}$ ;
- $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^{2-\alpha}}{t^3} = \dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ : donc $f_\alpha$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha+1 > 1$, i.e. $\alpha > 0$.

Donc $f_\alpha$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha \in ]0,1[$.

($\alpha = 2-\alpha$, i.e. $\alpha = 1$) Alors $f_\alpha(t) = f_1(t) = \dfrac{2t}{t^3+\sqrt{t}}$ et, par théorème d'équivalence :
- $f_1(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{2t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}$ : donc $f_1$ est intégrable sur $]0,1]$ ;
- $f_1(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2t}{t^3} = \dfrac{2}{t^2}$ : donc $f_1$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

($\alpha > 2-\alpha$, i.e. $\alpha > 1$) Alors, par théorème d'équivalence :
- $f_\alpha(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{t^{2-\alpha}}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{\alpha-3/2}}$ : donc $f_\alpha$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\alpha - \dfrac{3}{2} < 1$, i.e. $\alpha < \dfrac{5}{2}$ ;
- $f_\alpha(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t^\alpha}{t^3} = \dfrac{1}{t^{3-\alpha}}$ : donc $f_\alpha$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $3-\alpha > 1$, i.e. $\alpha < 2$.

Donc $f_\alpha$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\alpha \in ]1,2[$.

On en conclut que $\boxed{f_\alpha \text{ est intégrable sur } ]0,+\infty[ \iff \alpha \in ]0,1[ \cup \{1\} \cup ]1,2[ = ]0,2[}$.