



ING1 – Génie Mathématique

Session N° 1

LL

Matière : Analyse numérique

Date : 8 juin 2017

Durée : 3h au total

Nombre de pages : ??

Suggestion d'exercice

Exercice 1 : Numération.

On considère un système binaire normalisé suivant la norme IEEE 754, disposant de p chiffres de mantisse et d'exposants compris entre -6 et 7

1. Quel est le nombre de chiffres utilisé pour le codage de l'exposant?

Correction :

On sait d'après le cours que l'intervalle des exposants autorisés est

$$\llbracket E_{\min}, E_{\max} \rrbracket = \llbracket -(2^{N_e-1} - 2), 2^{N_e-1} - 1 \rrbracket$$

Pour $N_e = 4$, on obtient

$$\llbracket E_{\min}, E_{\max} \rrbracket = \llbracket -(2^{4-1} - 2), 2^{4-1} - 1 \rrbracket = \llbracket -6, 7 \rrbracket$$

2. Quel est le plus grand nombre représentable dans ce système?

Correction :

D'après le cours, le plus grand nombre normalisé $v_{\max} = (2 - 2^{-N_m}) \cdot 2^{E_{\max}}$ donc ici $v_{\max} = (2 - 2^{-p}) \cdot 2^7$

3. Quel est le plus petit nombre normalisé représentable dans ce système (en valeur absolue), noté n_{\min} ?

Correction :

D'après le cours, $n_{\min} = 2^{E_{\min}} = 2^{-6} = 0,015625$

4. Combien vaut l'épsilon machine en fonction des paramètres du système?

Correction :

$$\varepsilon = 2^{-N_m} = 2^{-p}$$

5. Montrer que si $p \leq 6$ alors on ne peut pas distinguer n_{\min} de 0.

Correction :

D'après la définition de la précision machine, ε est le plus petit nombre réel positif tel que les représentations de 1 et $1 + \varepsilon$ soient distinctes.

Si $\varepsilon = 2^{-p}$ avec $p \leq 6$ alors $\varepsilon \geq 2^{-6} = n_{\min}$. Dans ce cas, si on effectue l'opération $1 + n_{\min}$ alors on trouve 1 : on a le même résultat que si on avait calculé $1 + 0$.

6. On suppose désormais que $p = 7$.

Les nombres suivants peuvent-ils être représentés de façon exacte dans ce système? Justifiez vos réponses

- (a) 1, 1

Correction :

La partie décimale de 1, 1, égale à 0,1 s'exprime en binaire par 0,0001100011... donc en utilisant un nombre fini de chiffres après la virgule, on ne peut pas représenter 1,1 de façon exacte.

(b) 0,125

Correction :

0,125 s'exprime en binaire par 0,001 qui correspond à 2^{-3} . Comme $-3 \in \llbracket E_{\min}, E_{\max} \rrbracket$, on peut représenter ce nombre exactement.

(c) 256

Correction :

On a $v_{\max} = (2 - 2^{-p}) \cdot 2^7$ soit $v_{\max} = (2 - 2^{-7}) \cdot 2^7 = 255$ donc on ne peut pas représenter le nombre 256.

7. Par quelle valeur décimale sont approchés les nombres suivants en supposant que l'approximation se fait par troncature

(a) 2,1

Correction :

On a vu à la question 6a la valeur binaire de 0,1, donc on a $2,1_{10} = 10,0001100011\dots$. La valeur normalisée est $2,1_{10} = 1,00001100011\dots \times 2^{+1}$. En tronquant à 7 chiffres la mantisse, on obtient $1,0000110 \times 2^{+1} = 2,09375$

(b) $\frac{1}{3}$

Correction :

La représentation binaire de la partie fractionnaire de $\frac{1}{3}$ est 0,0101.... Sa représentation normalisée est $1,0101\dots \times 2^{-2}$. Après troncature à 7 chiffres de la mantisse, on obtient $1,0101010 \times 2^{-2}$ soit $(1 + 2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-6}) \times 2^{-2} = 0,33203125$

8. En déduire la valeur du résultat de $2,1 + \frac{1}{3}$ dans ce système

Correction :

D'après les questions précédentes, on a $2,1 + \frac{1}{3} = 1,0000110 \times 2^{+1} + 1,0101010 \times 2^{-2}$. L'alignement donne

$$2,1 + \frac{1}{3} = (1,0000110 + 0,001010101) \times 2^1 = 1,0011011 \times 2^1$$

après troncature. Cela donne en décimal 2,421875.

9. Combien de nombres différents ce système permet-il de représenter?

Correction :

Les nombres du système sont de la forme

$$(-1)^s 1, a_1 a_2 \dots a_7 \times 2^E$$

avec $E \in \llbracket E_{\min}, E_{\max} \rrbracket = \llbracket -6, 7 \rrbracket$

On a donc :

— 2 possibilités pour le signe

— le nombre de choix pour l'exposant est : $E_{\max} - E_{\min} + 1 = 16$ dont on doit retirer les 2 nombres réservés, soit 14 nombres

— le nombre de mantisses différentes est 2^7

On obtient donc $2 \times 14 \times 2^7 = 3584$ nombres, dont on soustrait 1 car il y a deux zéros, soit au total 3583 nombres différents.