EISTI	**ING1 – Génie Mathématique** **Examen 1ère session Corrigé** *LL*	
	Matière : **Analyse numérique**	*Date* : **7 juin 2018**
		Durée : **2h**
		Nombre de pages : **??**

Documents autorisés : 2 pages recto-verso manuscrites
Tous les exercices sont indépendants

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation du second degré (E) : $x^2 - 3x + 2 = 0$ par une méthode de point fixe.

1. Déterminer les solutions exactes x_1 et x_2.
   Solution : on trouve $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$
2. On envisage plusieurs solutions possibles pour le choix de la fonction g qui admet un point fixe. Parmi elles, on considère :

$$g_1(x) = \sqrt{3x-2} \tag{1}$$
$$g_2(x) = \frac{2}{3-x} \tag{2}$$
$$g_3(x) = \frac{x^2-2}{3} \tag{3}$$

   Quelles sont parmi les fonctions g_1, g_2 et g_3, celles qui permettent de résoudre (E)?
   Solution : Il faut vérifier que les fonctions vérifient $g(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.
   Pour g_1 on a bien $\sqrt{3x-2} = x \Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
   Pour g_2 on a bien $\frac{2}{3-x} = x \Leftrightarrow 2 = (3-x)x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
   Pour g_3 on a $\frac{x^2-2}{3} = x \Leftrightarrow x^2 - 2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$. Ce n'est pas l'équation à résoudre donc la fonction g_3 ne permet pas de résoudre (E).
3. Reproduisez et complétez le tableau ci-dessous pour les fonctions retenues à la question précédente :

	pour $x = x_1$	pour $x = x_2$
$g_1'(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$
$g_2'(x)$	$\frac{1}{2}$	2
$g_3'(x)$	sans objet	sans objet

4. Pour les fonctions retenues à la question 2 l'algorithme de point fixe peut-il converger, et vers quelle(s) racine(s) ?
   Solution :
   Pour g_1 l'algorithme ne peut pas converger vers x_1, car la dérivée est supérieure à 1 en x_1, et peut converger vers x_2 car la dérivée en ce point est inférieure à 1.
   Pour g_2 l'algorithme peut converger vers x_1 mais pas vers x_2 car la dérivée en x_1 est inférieure à 1 mais pas celle en x_2

5. Dans les cas où il peut y avoir convergence, quelles sont les valeurs admissibles pour le point de départ x_0

   Solution :

   Le point de départ doit être tel que la fonction y est définie. Pour g_1 cela donne donc $3x-2>0 \Leftrightarrow x>\frac{2}{3}$. Pour g_2 la condition est que $x \neq 3$.

6. Calculez les deux premiers itérés de la méthode de point fixe pour la fonction g_2 et un point de départ $x_0=0$.

   Solution : On remarque que l'on est bien dans le cadre de la condition posée à la question précédente. Pour $x_0=0$, on applique le schéma : $x_{k+1}=f(x_k)$, on obtient $g_2(0)=\frac{2}{3}=x_1$. Puis $x_2=g_2(x_1)=g_2(\frac{2}{3})=\frac{6}{7}$.

Exercice 2. Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

On envisage de résoudre le système $Ax=b$

1. Quels sont les vecteurs b pour lesquels la résolution est possible ? On précisera le sous-espace auquel ils appartiennent.

   Solution : Pour que la résolution soit possible, il faut que $b \in \operatorname{Im} A$, soit ici $b \in Vect(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$, cela revient à dire que b est sur l'axe des ordonnées.

2. Pour un vecteur $b^*=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, déterminer le plus proche vecteur de b^* pour lequel la résolution est possible. On le notera $\tilde{b}$. Donner la solution x_b du système $Ax_b=\tilde{b}$ appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

   Solution : $\tilde{b}$ est le projeté orthogonal de b sur $\operatorname{Im} A$. Sans calcul on voit que $\tilde{b}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Les solutions recherchées sont donc celles de :

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$$

   Sans calcul on obtient $x_1+x_2+x_3=2$. la solution x_b cherchée est $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

3. Déterminer les valeurs singulières de A. En déduire la matrice Σ de la décomposition en valeurs singulières. (On ne demande pas les matrices U et V de la décomposition en valeurs singulières.)

   Solution : Les valeurs singulières sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de $AA^\top$ (ou de $A^\top A$). Ici il est plus pratique de calculer $AA^\top$ pour une raison de taille :

$$AA^\top=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$$

   Il y a donc une seule valeur singulière égale à $\sqrt{3}$.

On en déduit Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Donner l'expression de x, solution de $Ax = b^*$ en fonction de b^*, Σ, U et V. (On ne demande pas de calcul)

Solution : On a d'après le cours $x = A^\dagger b^*$ avec $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^\top$ où :

$$\Sigma^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut le vérifier avec SCILAB :

```
  -->A=[0,0,0;1,1,1]
 A  =

    0.    0.    0.
    1.    1.    1.

-->[U,S,V]=svd(A)
 V  =

  - 0.5773503    0.8164966    0.
  - 0.5773503  - 0.4082483  - 0.7071068
  - 0.5773503  - 0.4082483    0.7071068
 S  =

    1.7320508    0.    0.
    0.           0.    0.
 U  =

    0.  - 1.
  - 1.    0.

-->InvS=[1/sqrt(3) 0;0 0;0 0]
 InvS  =

    0.5773503    0.
    0.           0.
    0.           0.

-->V*InvS*U'*[2;2]
 ans  =

    0.6666667
    0.6666667
    0.6666667
```

Exercice 3. On considère une matrice A de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1. Le conditionnement de A relativement à la norme 2 vaut :

$$cond_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

Démontrer cette expression.

Solution Revenons à la définition :

$$\kappa_2 = |||A|||_2 \,.\, |||A^{-1}|||_2$$

Dans le cas où A est hermitienne et définie positive, alors

$$|||A|||_2 = \rho(A)$$

comme on l'a vu au théorème 3.6 donc

$$\kappa_2 = \rho(A) \times \rho(A^{-1})$$

Si on note λ une valeur propre de A, alors il existe un vecteur v non nul, tel que :

$$\lambda v = Av$$

De même si on note μ une valeur propre de A^{-1}, alors il existe un vecteur w non nul, tel que :

$$\mu w = A^{-1} w$$

Dans ce cas on a donc en multipliant à gauche par A :

$$Aw = \frac{1}{\mu} w$$

donc

$$\lambda = \frac{1}{\mu}$$

ce qui implique que

$$\lambda_{min} = \frac{1}{\mu_{max}}$$

ou de façon équivalente

$$\mu_{max} = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

donc

$$\kappa_2 = \lambda_{max} . \mu_{max} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

2. Soit B la matrice définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4,00001 \end{pmatrix}$$

La commande SCILAB `spec(B)`, qui permet de déterminer le spectre de B, donne

```
-->spec(B)
  ans  =
 0.0000020
 5.000008
```

En déduire la valeur approximative du conditionnement de B en norme 2.
Solution : Le texte est équivoque car on est incité à utiliser la question 1 :

$$cond_2(B) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

On a ici $\lambda_{max} = 5.000008$ et $\lambda_{min} = 2.10^{-6}$ donc

$$cond_2(B) \simeq \frac{5}{2.10^{-6}} = 2.5 \times 10^{+6} = 2500000$$

En réalité, le résultat ne s'applique pas car B n'est pas symétrique. Elle est en revanche définie positive car ses valeurs propres sont strictement positives. Pour calculer son conditionnement, il faut donc passer par la définition de la norme 2 :

$$|||B|||_2 = \sqrt{\rho(B.B^T)}$$

Si on note $\alpha = 4,00001$, le calcul donne :

$$B.B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1+4\alpha \\ 1+4\alpha & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Le calcul des valeurs propres de $B.B^T$ donne :

$$\det(B.B^T - \lambda.I) = \lambda^2 - (18+\alpha^2).\lambda + 10^{-10}$$

En négligeant 10^{-10} devant les autres termes, on obtient $\rho(B.B^T) = 18+\alpha^2$ donc

$$|||B|||_2 = \sqrt{\rho(B.B^T)} \simeq \sqrt{34} \simeq 5,8$$

Avec

$$(B.B^T)^{-1} = \frac{1}{\det(B.B^T} \begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & -(1+4\alpha) \\ -(1+4\alpha) & 17 \end{pmatrix}$$

et $\det(B.B^T) = 10^{-10}$ on obtient $\rho((B.B^T)^{-1}) \simeq 34.10^{+10}$ donc

$$|||B^{-1}|||_2 = 5,8.10^{+5}$$

On en déduit

$$cond_2(B) \simeq 34.10^{+5}$$

3. On résout le système $Bx = c$ avec $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ puis avec $c' = \begin{pmatrix} 5 \\ 5,00001 \end{pmatrix}$ On trouve avec SCILAB les solutions respectives x et x' suivantes :

```
-->linsolve(B,-[5;5])
 ans  =

    5.
    1.288D-09

-->linsolve(B,-[5;5.00001])
 ans  =

    1.
    1.
```

Ces résultats sont-ils cohérents avec la question qui précède ? (On expliquera pourquoi)

Solution : On observe que le système $Bx = c'$ a bien pour solution exacte $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On peut considérer c comme un second membre perturbé par rapport à c' avec $c = c' + \Delta c$ où $\Delta c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10^{-5} \end{pmatrix}$

On applique donc le résultat portant sur la perturbation du second membre d'un système linéaire :

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x'\|} \le \kappa(B) \cdot \frac{\|\Delta c\|}{\|c'\|} \tag{4}$$

En utilisant les normes euclidiennes, on a :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x'\|_2} \le \kappa_2(B) \cdot \frac{\|\Delta c\|_2}{\|c'\|_2}$$

Ici $\Delta x = x' - x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1.28810^{-09} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$\|\Delta x\|_2 \simeq \sqrt{17} \simeq 4$$

$$\|x'\|_2 = 1, \|c'\|_2 \simeq 5, \|\Delta c\|_2 = 10^{-5},$$

donc

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x'\|_2} \simeq \frac{4}{1} = 4$$

et au second membre

$$\kappa_2(B) \cdot \frac{\|\Delta c\|_2}{\|c'\|_2} \simeq 2.5 \times 10^{+6} . \frac{10^{-5}}{5} = 5$$

La majoration **??** est donc bien vérifiée, et le résultat obtenu est cohérent avec celui du conditionnement de B.

4. Mickey dispose d'une machine où les nombres réels sont représentés (sous forme décimale) par une partie fractionnaire à trois chiffres, comprise entre 0 et 1, et un exposant à un chiffre. Par exemple $42,3$ est représenté par $0,423E2$ ou $0,00123$ par $0,123E-2$.

   Que devient la matrice B si on la représente sur cette machine ? Quel problème cela peut-il poser à Mickey ?

Solution Dans
$$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 4,00001\end{pmatrix}$$
le terme en position $(2,2)$ va être remplacé par 4 donc la matrice devient singulière. Mickey va donc être amené à utiliser une décomposition en valeurs singulières pour résoudre ce système. Il se peut qu'il ne trouve pas solution unique.

Exercice 4. Soient la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, le vecteur $b=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $x^{(0)}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ donné.

On s'intéresse à la résolution du système $Ax=b$ par des méthodes itératives.

1. *Méthode de Jacobi*

   (a) Ecrire la méthode de Jacobi pour la résolution du système $Ax=b$, sous forme $x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+c_J$.

   Solution : $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ donc on la décompose sous la forme $A=D-(E+F)$ avec $D=I$, $E+F=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$

   Il vient :
$$B_J=E+F=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_J=b$$

   (b) Calculer le rayon spectral de B_J et en déduire si la méthode de Jacobi converge.

   Solution : Les valeurs propres de B_J sont toutes nulles :
$$\det(B_J-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 2\\ -1 & -\lambda & -1\\ -2 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & -2 & 0\\ -1 & -\lambda & -1-\lambda\\ -2 & -2 & -\lambda-2\end{vmatrix}=-\lambda^3$$
   donc $\rho(B_J)=0<1$. Il s'ensuit que la méthode converge.

   (c) Calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ pour $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

   Solution : On utilise $x^{(k+1)}=B_J x^{(k)}+b$. Il vient $x^{(1)}=B_J x^{(0)}+b=b$, puis $x^{(2)}=B_J x^{(1)}+b=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$

2. *Méthode de Gauss-Seidel*

   (a) Ecrire la méthode de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax=b$, sous forme $x^{(k+1)}=B_{GS}x^{(k)}+c_{GS}$.

Solution : On décompose A sous la forme$D-E-F$ avec $D-E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$ et on en déduit d'après l'indication du texte

$$B_{GS}=(D-E)^{-1}F=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&2&-3\\0&0&2\end{pmatrix}$$

De plus

$$c_{GS}=(D-E)^{-1}.b=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

(b) Calculer le rayon spectral de B_{GS} et en déduire si la méthode de Gauss-Seidel converge.
Solution : On cherche les valeurs propres de B_{GS} :

$$\det(B_{GS}-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&-2&2\\0&2-\lambda&-3\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(2-\lambda)^2$$

donc $\rho(B_{GS}=2>1$: la méthode diverge.

N.B. : On fournit le calcul suivant :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}$$